ТОГБПОУ «Аграрно-технологический техникум»

Пособие
по выполнению практических работ по математике для студентов 2, 3 курсов

пос свх «Селезнёвский»
2020

Автор: преподаватель математики ТОГБПОУ "Аграрно-технологический техникум" Щёголева Т.А

Методическое пособие состоит из 14 практических работ, каждая из которых проводится после изучения соответствующей темы курса. По каждой теме дан краткий теоретический материал. Это даёт возможность использовать данное пособие, как на очном отделении, так и на заочном. Образцы решения примеров и описание хода выполнения практических работ помогут студентам при самостоятельной работе

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Овладение математическими методами и умение применять их на практике необходимы каждому работник в любой сфере деятельности. Деятельность человека все больше становится принципиально инновационной. Существенно сокращается значимость и сужается круг репродуктивной деятельности, связанной, как правило, с использованием традиционных технологий, растет инновационная активность человека во всех областях его деятельности. Эти процессы и тенденции могут получить дальнейшее эффективное развитие только в условиях становления инновационной системы образования. Основной задачей изучения курса математики студентами 2-3 курсов является овладение ими знаний основных математических положений и методов, необходимых в дальнейшем для того, чтобы применять знания, умения и личностные качества для успешной деятельности в определенной области.

Пособие составлено в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика», разработанной на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальностям, содержит образцы решений типовых примеров и задач, выполнения практических работ, поясняющих теоретический материал, изложенный в лекциях.

Пособие состоит из 14 практических работ, каждая из которых проводится после изучения соответствующей темы курса. По каждой теме приведены краткий теоретический материал. К каждой практической работе рассматриваются задачи с решениями. Это даёт возможность использовать данное пособие, как на очном отделении, так и на заочном. Образцы решения примеров и описание хода выполнения практических работ помогают студентам при самостоятельной работе.

В ТОГБПОУ «Аграрно-технологический техникум» большое внимание уделяется разработке и внедрению в учебный процесс учебных методических пособий, учебников, в т.ч. и в электронном виде, созданных преподавателями техникума, которые используют студенты на уроках и внеурочное время.

Практические занятия предназначены для закрепления и проверки умений студентов применять полученные теоретические знания на практике. Поэтому к подготовке и выполнению практических занятий следует относиться с полной ответственностью и серьезностью. Перед выполнением практического занятия необходимо изучить теоретический материал, предшествующий данной практической работе, внимательно прочитать теоретические сведения к самому занятию, ответить на вопросы. Выполнение самой работы заключается в самостоятельном решении указанных в задании задач и оформлении отчета по практическим занятиям.

В заданиях для самостоятельного выполнения представлены задачи разного уровня сложности, что даёт возможность преподавателю оценивать дифференцированно усвоение учебного материала каждым студентом.

Пособие может быть рекомендовано преподавателям и студентам учреждений среднего профессионального образования, учителям и учащимся старших классов средней школы, а также служить для целей самообразования.

Практическая работа 1
ТЕМА: Вычисление пределов функции.

ЦЕЛЬ: Закрепить навыки нахождения пределов.
УМЕНИЯ И НАВЫКИ:

- знать теоремы о пределах, способы вычисления пределов;
- уметь применять теоремы о пределах для нахождения пределов функций.

Теоретическая часть

Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ рассмотрим на примерах.

Пример 1. Вычислите пределы

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{arctg\,5x}$ *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$

Решение:

а) Подставив в данное выражение предельное значение аргумента *x* = -3, получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель на линейные множители, используя тождество $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, где x_1 *и* x_2 - корни квадратного трехчлена. Дискриминант $D=b^2-4ac$, корни трехчлена $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

$4x^2+11x-3 = 4\cdot(x+3)\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right) = (x+3)\cdot(4x-1)$, т.к.

$D=(11)^2-4\cdot4\cdot(-3)=169$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{169}}{2\cdot4}=\left\{-3;\frac{1}{4}\right\}$

$3x^2+10x+3 = 3\cdot(x+3)\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right) = (x+3)\cdot(3x+1)$, т.к.

$D=(10)^2-4\cdot3\cdot3=64$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{64}}{2\cdot3}=\left\{-3;-\frac{1}{3}\right\}$

Тогда

$$\lim_{x\to -3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)\cdot(4x-1)}{(x+3)\cdot(3x+1)}=\lim_{x\to -3}\frac{4x-1}{3x+1}=\frac{4\cdot(-3)-1}{3\cdot(-3)+1}=\frac{13}{18}.$$

б) При $x\to\infty$ выражение дает неопределенность $\infty-\infty$. Для ее устранения умножим и разделим это выражение на сопряженное выражение вида $\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$

Получили неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. для устранения этой неопределенности разделим числитель и знаменатель почленно на *x,* получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}.$$

в) Обозначим *arctg5x = y*. Тогда *5x = tgy, x =* $\frac{1}{5}\cdot tgy$ и $y\to 0$ при $x\to 0$. Применяя свойства пределов и формулу первого замечательного предела $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ или $\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{mx}=\frac{n}{m}$, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{arctg\,5x}=\lim_{y\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{5}tgy}{y}=\frac{2}{5}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{tgy}{y} =$$

$$\frac{2}{5}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y\cdot\cos y}=\frac{2}{5}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{5}.$$

г) При $x\to\infty$ выражение $\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$ является неопределенностью вида 1^{∞}. Для устранения этой неопределенности представим основание степени в виде суммы 1 и бесконечно малой величины и применим формулу второго замечательного предела $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\frac{2x-3}{2x+1}=\frac{(2x+1)-4}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x+1}+\frac{-4}{2x+1}=1+\frac{-4}{2x+1}.$$

Тогда

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{4x+5}$. Пусть $\frac{-4}{2x+1}=\frac{1}{y}$, выразим отсюда *4x+5* через *y:* $2x+1=-4y$, $4x+2=-8y$, $4x+2+3=-8y+3$ и $4x+5=-8y+3$.

$y\to\infty$ при $x\to\infty$. Переходя к переменной *y* и используя свойства степеней, получим:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{4x+5}$ = $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-8y+3}$ = $\left(\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{-8}\cdot¿¿$ $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3}$ = $e^{-8}\cdot 1^3=\frac{1}{e^8}$.

Для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ можно использовать правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ = $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, если частное $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ в точке $x = x_0$ также есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$,то следует перейти к отношению вторых производных.

В случае неопределенности вида $0\cdot\infty \text{ или } \infty-\infty$ следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести её к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, далее воспользоваться правилом Лопиталя.

В случае неопределенности вида 0^∞ или ∞^0 или 1^∞ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел её логарифма.

Пример 2. Найти пределы, используя правило Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=¿\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{6x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=¿\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)'}{(6x+3)'}=\lim\limits_{x\to\infty}¿\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Вопросы для самопроверки

1. Какие вы знаете теоремы р пределах? Назовите их.
2. Как раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞.
3. Для чего служит правило Лопиталя?
4. Назовите первый и второй замечательные пределы.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Найти пределы

1 вариант *2 вариант*

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 8}{4x^2 - 11x + 2}$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{3x^2 - 8x - 3}$

3. $\lim\limits_{x \to 6} \frac{6 - x}{3 - \sqrt{x + 3}}$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 11}{3x^2 + x^2 - 1}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x}$

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 + 5x - 4}{x^2 + 3x - 7}$

2. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{3x^2 - 17 + 10}{3x^2 - 16x + 5}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{4x}$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2}{x^2 - 1}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 5z)^{\frac{3}{5x}}$

Задание 2. Применяя правило Лопиталя, вычислить пределы, предварительно преобразовав их к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

Вариант 1. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

Вариант 2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \ln x - \sqrt{x + x^2}\right)$

Практическая работа №2
ТЕМА: Непрерывность функции. Точки разрыва

ЦЕЛЬ: научить исследовать функцию, находить точки разрыва и строить её график

УМЕНИЯ И НАВЫКИ:

- знать определение непрерывной функции и ее свойства;
- уметь находить точки разрыва.

Теоретический материал

Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если 1) она определена в этой точке; 2) существует конечный предел, равный A, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$; 3) этот предел равен значению функции при $x = x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = A$.

Сумма, произведение двух непрерывных функций в точке x_0 является функцией непрерывной в точке x_0.

Частное двух непрерывных функций в точке является непрерывной функцией в точке x_0, если $f(x) \neq 0$ т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}$$

Все основные элементарные функции являются непрерывными в их области определения.

Если в какой-либо точке x_0 функция $y = f(x)$ не является непрерывной, то точка $x = x_0$ называется **точкой разрыва** этой функции, а функция $y = f(x)$ называется разрывной в этой точке.

Если аргумент $x \to x_0$ остается все время слева (справа) от x_0, т. е. $x < x_0$ ($x > x_0$) и при этом функция $f(x)$ имеет предел – число A, то это число называется **односторонним пределом** функции слева (справа) в точке x_0 и обозначается:

$$\lim_{x<x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A$$

$$\lim_{x>x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = A$$

Точка x_0 называется точкой разрыва 1- ого рода функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы слева и справа, т. е. существуют $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A_2$

В этом случае величина S = $|A_1 - A_2|$ называется скачком функции в точке x_0.

Точка x_0 функции $f(x)$ называется точкой разрыва 2-ого рода, если нет по крайней мере одного конечного одностороннего предела функции в этой точке.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функции:

1) $y = \begin{cases} x+1, & если\, x \geq 1 \\ 3x-2, & если\, x<1 \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{x}{x-2}$

Решение: 1) Функция задана двумя непрерывными функциями $y = x+1$ и $y = 3x - 2$. Найдем односторонние пределы

$$\lim_{x<1} (3x-2) = \lim_{x \to 1-0} (3x-2) = 1$$

$$\lim_{x>1} (x+1) = \lim_{x \to 1+0} (x+1) = 2$$

Односторонние пределы не равны, значит, в точке $x = 1$ функция имеет разрыв, т.е. функция не является непрерывной. Скачок $S = |1-2| = 1$.

2) Данная функция определена при всех х, кроме $x = 2$, т.е. определена на промежутках (-∞; 2) и (2; + ∞). В области определения данная функция является непрерывной как частное от двух непрерывных функции.

Точкой разрыва функции является единственная точка $x_0 = 2$. Определим тип разрыва, вычислив односторонние пределы при $x \to 2$: $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x}{x-2} = -\infty$,: $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x}{x-2} = +\infty$, следовательно, $x_0 = 2$ – точка разрыва второго рода.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется непрерывной в точке?
2. Дайте понятие непрерывности функции на промежутке
3. Приведите примеры непрерывных функций
4. Назовите свойства непрерывных функций
5. Что называется точкой разрыва? Какие бывают точки разрыва?

6. Дайте понятие одностороннего предела.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. 1. Исходя из определения непрерывной функции, докажите непрерывность данных функций в указанных точках:

Вариант 1. 1) $y = 3x - 1$ в точке $x = -1$; 2) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ в точке $x = 2$

Вариант 2. 1) $y = x^2 + 3$ в точке $x = -2$; 2) $y = \frac{x^2}{x - 4}$ в точке $x = 3$

Задание 2. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва и определите их тип, постройте график для первой функции:

	Вариант 1.	*Вариант 2.*
1.	$y = \begin{cases} x+2, & \text{если } x > 1 \\ x^2, & \text{если } x \le 1 \end{cases}$	$y = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x \ge -1 \\ -x-1, & \text{если } x \leftarrow 1 \end{cases}$
2.	$y = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3), & x \le 1 \\ 6-5x & 1 < x < 3 \\ x-3 & x \ge 3 \end{cases}$	$y = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & x \leftarrow 2 \\ \sqrt{4-x^2} & -2 \le x \le 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases}$
3.	$y = \frac{4x-1}{x+3}$	$y = \frac{2x+1}{x-5}$
4.	$y = \frac{\lvert x+5 \rvert}{x+5} - \frac{5}{x}$	$y = \frac{\lvert x+1 \rvert}{x+1} x - 1$

Практическая работа №3
ТЕМА: Производная и её приложения. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям

ЦЕЛЬ: научить применять производную для расчетов различных величин, исследовать функцию и строить её график

УМЕНИЯ И НАВЫКИ:
- знать формулы дифференцирования;
- уметь применять формулы к вычислениям.

Теоретический материал

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y = 5x^3 - 2x + \frac{3}{x}$; *б)* $y = \frac{4x^2 - 1}{9x + 5}$;

в) $y = \ln(2 + \sin 3x)$; *г)* $y = \sin^3 x$ при $x = \frac{\pi}{3}$;

д) $y=4^{\sqrt{2x-3}}$; *е)* $y=\ln\frac{2x-9}{4x+7}$.

Для решения данных примеров будем пользоваться формулами дифференцирования:

1. $C^{'}$ = 0, где С - постоянная
2. $x^{'}$ = 1
3. $(f(x)\pm g(x))^{'} = f^{'}(x) \pm g^{'}(x)$
4. $(f(x)\cdot g(x))^{'} = f^{'}(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot$¿¿ $g^{'}(x)$
5. $(a\cdot f(x))^{'} = a\cdot f^{'}(x)$, где *а* – постоянный множитель
6. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'}=\frac{f^{'}(x)\cdot g(x)-g^{'}(x)\cdot f(x)}{g^{2}(x)}$

Таблица производных

	x – аргумент		для сложных функций, где u = u (*x*)
7.	$(x^{n})^{'}=n\cdot x^{n-1}$	7а	$(u^{n})^{'}=n\cdot u^{'}\cdot u^{n-1}$
8.	$\left(\frac{a}{x}\right)^{'}=-\frac{a}{x^{2}}$	8а.	$\left(\frac{a}{u}\right)^{'}=-\frac{a\cdot u^{'}}{u^{2}}$
9.	$(\sqrt{x})^{'}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	9а.	$(\sqrt{u})^{'}=\frac{u^{'}}{2\sqrt{u}}$
10.	$(a^{x})^{'}=a^{x}\ln a$	10а.	$(a^{u})^{'}=a^{u}\cdot u^{'}\cdot\ln a$
11.	$(e^{x})^{'}=e^{x}$	11а.	$(e^{u})^{'}=u^{'}\cdot e^{u}$
12.	$(\log_{a}\lvert x\rvert)^{'}=\frac{1}{x\ln a}$, при а>0, а ¿ 1	12а.	$(\log_{a}\lvert u\rvert)^{'}=\frac{u^{'}}{u\ln a}$
13.	$(\ln\lvert x\rvert)^{'}=\frac{1}{x}$	13а.	$(\ln\lvert u\rvert)^{'}=\frac{u^{'}}{u}$
14.	$(\sin x)^{'}=\cos x$	14а.	$(\sin u)^{'}=u^{'}\cdot\cos u$
15.	$(\cos x)^{'}=-\sin x$	15а.	$(\cos u)^{'}=-u^{'}\cdot\sin u$
16.	$(tgx)^{'}=\frac{1}{\cos^{2}x}$	16а.	$(tgu)^{'}=\frac{u^{'}}{\cos^{2}u}$
17.	$(ctgx)^{'}=-\frac{1}{\sin^{2}x}$	17а.	$(ctgu)^{'}=-\frac{u^{'}}{\sin^{2}u}$

18.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	18а.	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
19.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	19а.	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
20.	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	20а.	$(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
21.	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	21а.	$(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

а) Данная функция является алгебраической суммой. Производную этой функции найдём, используя формулы 3, 5, 7, 2, 8:

$$y' = (5x^3)' - (2x)' + \left(\frac{3}{x}\right)' = 5\cdot(x^3)' - 2(x)' - \frac{3}{x^2} = 5\cdot 3x^2 - 2 - \frac{3}{x^2}.$$

б) Найдем производную, используя формулы 2, 3, 5, 6, 7:

$$y = \frac{4x^2-1}{9x+5} \quad \left(\frac{4x^2-1}{9x+5}\right)' = \frac{(4x^2-1)'\cdot(9x+5)-(9x+5)'\cdot(4x^2-1)}{(9x+5)^2} =$$

$$= \frac{8x\cdot(9x+5)-9\cdot(4x^2-1)}{(9x+5)^2} = \frac{72x^2+40x-36x^2+9}{(9x+5)^2} = \frac{36x^2+40x+9}{(9x+5)^2}.$$

в) Это сложная логарифмическая функция с промежуточным аргументом $u=2+\sin 3x$. Применяя формулы 13а, 4, 1, 14а, 5, 2, получим:

$$(\ln(2+\sin 3x))' = \frac{(2+\sin 3x)'}{2+\sin 3x} = \frac{2'+(\sin 3x)'}{2+\sin 3x} = \frac{(3x)'\cdot\cos 3x}{2+\sin 3x} = \frac{3\cos 3x}{2+\sin 2x}.$$

г) Промежуточным аргументом данной степенной функции является функция $u=\sin x$, используя формулы 7а и 14:

$$(\sin^3 x)' = 3\cdot\sin^2 x\cdot(\sin x)' = 3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x.$$

Вычислим значение производной при $x=\dfrac{\pi}{3}$:

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\cdot\sin^2\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = 3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{8}.$$

д) Это сложная показательная функция с промежуточным аргументом $u=\sqrt{2x-3}$. Применим формулы 10а, 9а, 5, 1, 2:

$$\left(4^{\sqrt{2x-3}}\right)' = 4^{\sqrt{2x-3}}\cdot(\sqrt{2x-3})'\cdot\ln 4 = 4^{\sqrt{2x-3}}\cdot\frac{(2x-3)'\cdot\ln 4}{2\cdot\sqrt{2x-3}} =$$

$$=4^{\sqrt{2x-3}}\cdot\frac{2\cdot\ln 4}{2\cdot\sqrt{2x-3}}=\frac{4^{\sqrt{2x-3}}\cdot\ln 4}{\sqrt{2x-3}}.$$

е) Сначала преобразуем функцию, используя свойство логарифма дроби, который равен разности логарифмов числителя и знаменателя:

$$y=\ln\frac{2x-9}{4x+7}=\ln(2x-9)-\ln(4x+7).$$

Теперь дифференцируем по формулам 3, 13а, 5, 2, 1:

$$\left(\ln\frac{2x-9}{4x+7}\right)'=\left(\ln(2x-9)\right)'-\left(\ln(4x+7)\right)'=\frac{(2x-9)'}{2x-9}-\frac{(4x+7)'}{4x+7}=\frac{2}{2x-9}-\frac{4}{4x+7}=$$

$$=\frac{2\cdot(4x+7)-4\cdot(2x-9)}{(4x+7)\cdot(2x-9)}=\frac{32}{(4x+7)\cdot(2x-9)}.$$

Переменная $y = f(x)$ является **функцией** от переменной x, если задана такая зависимость между этими переменными, которая позволяет для каждого значения x однозначно определить значение переменной y.

Совокупность всех тех значений, которые принимает аргумент x функции $y = f(x)$, называется **областью определения** этой функции. Обозначается $D(f)$. Совокупность всех тех значений, которые принимает сама функция y, называется **областью изменения** этой функции. Обозначается $E(f)$.

Нули функции – точки, в которых функция обращается в нуль. Это решения уравнения $f(x) = 0$ (точки пересечения графика с осью Ox).

Промежутки знакопостоянства функции – интервалы, на которых функция положительна (график расположен выше оси Ox) или отрицательна (график расположен ниже оси Ox). Это решения неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Функция $y = f(x)$ называется **чётной**, если при всех значениях аргумента $f(–x) = f(x)$. Функция $y = f(x)$ называется **нечётной**, если при всех значениях аргумента $f(–x) = – f(x)$.При этом имеется в виду, что если x входит в область определения, то и $– x$ также входит в область определения.

Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T > 0$, что выполняется равенство $f(x) = f(x \pm T)$, верное при всех x.

Промежутки монотонности - это промежутки возрастания и убывания функции, т. е. интервалы, на которых функция или возрастает $(f'(x)>0)$ или убывает $(f'(x)<0)$.

Критическими точками функции $y = f(x)$ называются точки, в которых производная обращается в нуль, а также точки, в которых производная не существует.

Точки экстремума функции – точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает или самое большое (*max*) значение, или самое малое (*min*) значение по сравнению со значениями в близких точках. **Экстремумом функции** называется значение функции в точке экстремума.

Наибольшее, (наименьшее) значение функция достигает в точке максимума (минимума) или на концах отрезка.

Кривая называется выпуклой вверх (**выпуклой**) на промежутке [a; c), если все точки кривой лежат ниже любой её касательной на [a; c), где а< c < $в$ $(f''(x)>0)$. Кривая называется выпуклой вниз (**вогнутой**) на промежутке [c;b), если все точки кривой лежат выше любой её касательной на [c;b), $(f''(x)<0)$. Точка М кривой, которая отделяет выпуклость от вогнутости, называется **точкой перегиба** графика функции.

Прямая $x=x_0$ параллельная оси Oy, называется **вертикальной асимптотой** графика функции y = $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ = ± ∞. Асимптота графика функции $y = f(x)$ называется **наклонной** , если она пересекает ось Ox под углом φ ≠ $\frac{\pi}{2}$, т.е. не под прямым углом. Частным случаем наклонной асимптоты является **горизонтальная асимптота**, параллельная оси Ox (φ = 0).

Пусть наклонная асимптота имеет вид $y = kx + b$, тогда:

k = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$; b = $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами (x; $f(x)$), где x пробегает область определения функции $f(x)$.

Пример 2. Исследовать функцию $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ и построить её график.

Решение:

Исследование функции проведём по схеме:

- найдём область определения функции;
- исследуем функцию на непрерывность;
- установим, является ли данная функция четной, нечетной;
- найдем интервалы монотонности и точки экстремума;
- найдем интервалы выпуклости кривой и точки перегиба;
- найдем асимптоты;
- для более точного построения графика найдем несколько дополнительных точек.

Реализуем указанную схему:

Функция определена при всех значениях аргумента x, кроме x = 1, поэтому область определения $D=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на всей области определения, т.е. на интервалах $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$, Точка x = 1 является точкой разрыва второго рода.

Для установления четности или нечетности проверим выполнимость равенств при любых x из области определения.

$$f(-x)=\frac{2\cdot(-x)-1}{(-x-1)^2}=\frac{-2x-1}{(-x-1)^2}\neq f(x)$$

, значит, функция не является четной;

$$f(-x)=\frac{2\cdot(-x)-1}{\left|-x-1\right|^2}=\frac{-2x-1}{(-x-1)^2}=-\frac{2x+1}{(-x-1)^2}\neq -f(x)$$

, значит, функция не является нечетной. Следовательно, функция ни четная, ни нечетная.

Для исследования функции на монотонность и экстремум найдем её первую производную:

$$y'=\frac{(2x-1)'(x-1)^2-\left((x-1)^2\right)'(2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)^2-2(x-1)(x-1)'(2x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)-2(2x-1)}{(x-1)^3}=\frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3}=\frac{-2x}{(x-1)^3}.$$

Производная y' = 0 при x = 0 и не существует при *x* = 1. Таким образом получили две критические точки первого рода, но точка *x* = 1 не принадлежит области определения, в ней экстремума быть не может.

$$\begin{array}{ccccccc} & - & & + & & - & \\ -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \end{array}$$

рис. 1

Определим знаки первой производной на каждом полученном интервале, для этого возьмем произвольную точку из интервала и подставим её значение в первую производную вместо аргумента х, получим (см. рис. 1).

На первом и третьем интервалах производная y' < 0, следовательно, на этих интервалах ($-\infty$; 0) и (1; + ∞) функция убывает; на втором интервале производная y' > 0 и данная функция на этом интервале (0; 1) возрастает. При переходе через точку х = 0 производная меняет свой знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет минимум, его значение y_{min} = у (0) = -1. Значит точка с координатами (0; 1) является точкой минимума.

Для определения точек перегиба и выпуклости графика функции найдём вторую производную:

$$y''=\left(\frac{-2x}{(x-1)^3}\right)'=\frac{(-2x)'(x-1)^3-(-2x)\left|\left((x-1)^3\right)'\right|}{(x-1)^6}=\frac{-2(x-1)^3+2x\cdot3(x-1)^2}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{-2(x-1)+6x}{(x-1)^4}=\frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

Вторая производная $y''=0$ при $x=-\frac{1}{2}$ и не существует при х = 1, которая не входит в область определения. Разобъём область определения на интервалы и определим знак второй производной на каждом полученном интервале (рис. 2)

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & + \\ \hline \end{array}$$

$-\infty$ $\qquad -\frac{1}{2}$ $\qquad 1$ $\qquad +\infty$

рис. 2

На первом интервале вторая производная $y'' < 0$, значит на интервале $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ график функции обращен выпуклостью вверх; на втором и третьем интервалах вторая производная $y'' > 0$, значит на интервалах $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ и (1; $+\infty$) график функции обращен выпуклостью вниз. Так как вторая производная изменила свой знак при переходе через точку $x = -\frac{1}{2}$, то в этой точке функция имеет перегиб. Ордината этой точки $y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9}$. Следовательно, точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ – точка перегиба графика данной функции.

Для определения уравнения наклонных асимптот вида $y = kx + b$ воспользуемся формулами: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$. При $k = 0$ прямая вида $y = kx + b$ будет иметь вид $y = b$, в этом случае асимптота будет горизонтальной.

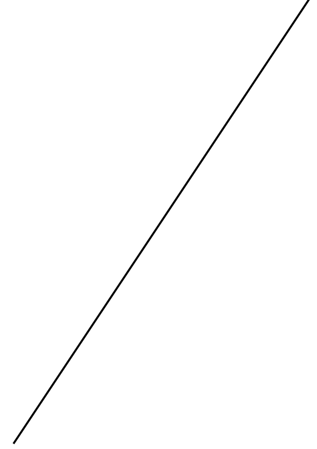
Тогда

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2 \cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{(x-1)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2} - 0x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{(x-1)\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 0,$$

отсюда следует, что $y = 0$ является горизонтальной асимптотой. В точке $x = 1$ функция имеет разрыв второго рода, причем $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty$. Поэтому прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. График функции представлен на рис.3:

рис 3



Геометрический смысл производной заключается в том, что угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ равен производной функции в этой точке, т.е. $k = f'(x)$.**Уравнение касательной** в точке $x = x_0$ *примет вид* $y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$

Пример 3. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ в точках пересечения её с прямой $3x + 2y - 4 = 0$.

Решение:

Найдем точки пересечения, решив систему $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$, откуда $3x + 2(\frac{1}{4}x^2 - x) - 4 = 0$, $\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$ получаем две точки $A(-4; 8)$ и $B(2; -1)$.

Составим уравнение касательной в точке *A:*

Найдем производную и её значение при $x = -4$, $y' = \frac{1}{2}x - 1$, при $x = -4$ $y' =$ ¿ – 3.

Значение функции в точке *A* равно 8, тогда уравнение касательной имеет вид $y - 8 = -3(x + 4)$ или $y = -3x - 4$. В точке *B* уравнение касательной имеет вид $y = -1$.

Физический смысл производной заключается в том, что производная пути по времени есть скорость точки в момент времени t_0, а вторая производная есть ускорение точки в момент времени t_0, т.е. $v = s'(t_0)$, $a = s''(t_0)$ или $a = v'(t_0)$.

Мощность P – производная работы A по времени t;

Сила тока I – производная заряда g по времени t;

Сила F– производная работы A по перемещению x;

Теплоемкость C – производная количества теплоты Q по температуре T;

Давление P – производная силы F по площади S;

Длина окружности C – производная площади круга S по радиусу R;

Темп роста производительности труда – производная производительности труда по времени t.

Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие эластичности функции. **Эластичностью** $E_x(y)$ изменения переменной y при изменении переменной x или эластичностью функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения относительных или процентных изменений y и x.

$$E_x(y)=\frac{x}{y}f'(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Эластичность показывает, на сколько процентов изменится (увеличится или уменьшится) значение функции y при увеличении аргумента x на 1% (с x до 1,01x).

Пример 4. Найти эластичность функции $y = 3 – 2x$ и её значение при x = 1,2

Решение: $E_x(y)=¿\ x\frac{f'(x)}{f(x)} = x\frac{(3-2x)'}{3-2x} = \frac{-2x}{3-2x}$, при x = 1,2 $E_x(y)=\frac{-2\cdot 1{,}2}{3-2\cdot 1{,}2}=-4$, т.е. при увеличении x на 1% (с 1,2 до 1,212) значение функции уменьшится на 4% (с 0,6 до 0,556).

Функция спроса (предложения) имеет вид $q = f(p)$ ($q = \varphi(p)$), где q – количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене p. Если надо установить, на сколько процентов изменится спрос (предложение) на товар при увеличении цены на 1%, то нужно найти значение **коэффициента эластичности спроса (предложения)** относительно цены по формуле

$$E_p(q)=p\frac{f'(p)}{f(p)} \qquad \left(E_p(q)=p\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)}\right)$$

Спрос является убывающей функцией цены и, следовательно, $f'(p)<0$, то $E_p(q)<0$. Предложение является возрастающей функцией цены, следовательно, $\varphi'(p)>¿0$, то $E_p(q)>0$. Если повышению цены на 1 % соответствует снижение (повышение) спроса более чем на 1 %, то **спрос (предложение) эластичны**, значение коэффициента спроса $E_p(q)\leftarrow 1$, значение коэффициента предложения $E_p(q)>1$. Если повышению цены на 1 % соответствует снижение (повышение) спроса менее чем на 1 %, то **спрос (предложение) неэластичны**, значение значение коэффициента спроса $-1<E_p(q)<0$, значение коэффициента предложения $0<E_p(q)<1$. Если повышению цены на 1 % соответствует снижение спроса (предложения) ровно на 1 %, то **спрос (предложение) нейтральны**, значение коэффициента спроса $E_p(q)=-1$, значение коэффициента предложения $E_p(q)=1$.

Пример 5.Функция спроса на некоторый товар имеет вид: $q=\frac{153}{2p+3}-1$. 1) найдите выражение для коэффициента эластичности спроса и его значение при

p = 70. Прокомментируйте полученный результат; 2) исследуйте динамику выручки продавцов для функции спроса $q = 10 - 0{,}5p$.

Решение:

1) Найдем производную функции спроса $q' = \frac{-153(2p+3)'}{(2p+3)^2}$ ¿$-\frac{306}{(2p+3)^2}$.

Функция спроса $q = \frac{153}{2p+3} - 1 = \frac{150-2p}{2p+3}$. Коэффициент эластичности спроса $E_p(q) = -p\frac{306(2p+3)}{(2p+3)^2(150-2p)} = \frac{306p}{(2p+3)(2p-150)}$. Значение коэффициента спроса при p = 70, $E_p(q) =$¿ $\frac{306\cdot 70}{143\cdot(-80)}$ ≈ – 1,9 < –1, значит спрос эластичен. При увеличении цены на 1% (с 70 до 70,7) выручка снизится.

2) Исследуем динамику выручки продавцов. Коэффициент спроса

$$E_p(q) = p\frac{(10-0{,}5p)'}{10-0{,}5p} = \frac{-0{,}5p}{10-0{,}5p} = \frac{p}{p-20}.$$

Найдем область определения и множество значений функции спроса $q \geq 0$, $p \geq 0$, т.е. 10 – 0,5 $p \geq 0$, получим $0 \leq p \leq 20$. Найдем множество значений функции, для этого выразим p через q: $0{,}5p = 10 - q$, отсюда $p = 20 - 2q$, $20 - 2q \geq 0$, т.е. $0 \leq q \leq 10$.

Возможны случаи:

а) *спрос эластичен*, если $\frac{p}{p-20} \leftarrow 1$или $\frac{p}{p-20} + 1 < 0$, решив это неравенство, получим $10 < p < 20$. Итак, в ценовом диапазоне от 10 до 20 рублей увеличение цены ведет к уменьшению выручки продавцов;

б) *спрос неэластичен*, если $-1 < \frac{p}{p-20} < 0$ или $\begin{cases} \frac{p}{p-20} + 1 > 0 \\ \frac{p}{p-20} < 0 \end{cases}$, отсюда $0 < p < 10$.

Итак, в ценовом диапазоне от 0 до 10 рублей увеличение цены ведет к увеличению выручки продавцов;

в) *спрос нейтрален*, если $\frac{p}{p-20} = -1$, отсюда $p = 10$. Это значение отделяет интервал эластичности от интервала неэластичности.

Пример 6. Тело движется по закону $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t + 30$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 2c$.

Решение:

$v(t) = s'(t) = t^2 - t + 1$, $в\, момент\, времени\, t = 2c$ скорость $v =$¿$4 - 2 + 1 = 3$ *м*/*с*. Ускорение $a = v'(t) = 2t - 1$, в момент времени $t = 2c$ ускорение $a =$¿ 3*м*/*с*^{2}.

При достаточно малых значениях $\Delta x\,(приращение\, переменной)$ $\Delta y \approx dy$ или $y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \approx y'(x_0)\Delta x$,откуда

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$$

Эта формула полезна в **приближенных вычислениях**, чем меньше значение Δx, тем точнее вычисления.

Пример 5. Вычислить приближенно: а) $\sqrt{15{,}86}$; б) $tg46^0$

Решение:

а) В качестве x_0 возьмем число, наиболее близкое к 15,84, такое чтобы был известен корень квадратный из числа, при этом Δx должно быть достаточно малым. Очевидно, следует взять $x_0 = 16$, тогда

$$\Delta x = x - x_0 = 15{,}86 - 16 = -0{,}14.$$

Производная $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Получим $\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x$, т.е.

$$\sqrt{15{,}86} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot (-0{,}14) ¿ 4 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot (-0{,}14) = 4 - \frac{0{,}14}{8} = 3{,}9825.$$

Итак, $\sqrt{15{,}86} \approx 3{,}98$.

б) В качестве x_0 возьмем число, наиболее близкое к 46^0, такое чтобы был известен тангенс этого числа $x_0 = 45^0 = \frac{\pi}{4}$, тогда $= 46^0 - 45^0 = 1^0 = \frac{\pi}{180}$. Производная $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Получим $tg\,46^0 \approx tg\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + \frac{\pi}{90} = 1 + 0{,}035$.

Итак, $tg\,46^0 \approx 1{,}035$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется производной? Каков её геометрический и физический смысл?
2. Как найти производную второго, третьего и т.д. порядков?
3. Как найти интервалы монотонности функции?
4. Назовите достаточный признак экстремума функции.
5. Как найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции?
6. Что называется асимптотой функции? Как найти вертикальные и наклонные асимптоты?
7. В чем заключается физический, геометрический смысл производной?
8. Что называется дифференциалом функции?
9. Напишите формулу, позволяющую находить приближенное значение функции при помощи дифференциала.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график

Вариант 1. $y = \frac{4x}{x^2+16}$ *Вариант 2.* $y = \frac{9x}{x^2+9}$

Задание 2. Тело движется по закону $s = s(t)$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = t_0$

Вариант 1. $s = 2 + 12t + 2t^2 - \frac{1}{3}t^3$, $t = 1$с

Вариант 2. $s=\frac{1}{3}t^3-t^2+2t-1,\qquad t=3\text{с}$

Задание 3. Используя формулу приближенного значения функции найти

Вариант 1. $5{,}02^3$ *Вариант 2.* $\sqrt{25{,}04}$

Задание 4. Решите задачи:

Вариант 1.

а) Функция спроса на некоторый товар имеет вид: $q=100-4p$. 1) найдите выражение для коэффициента эластичности спроса и его значение при $p_1 = 10$ и $p_2 = 20$. Прокомментируйте полученный результат; 2) исследуйте динамику выручки продавцов.

б) Требуется выделить прямоугольную площадку для стоянки автомобилей площадью 512 $м^2$, огородить её забором и разделить загородкой на три равные части параллельно одной из сторон площадки. Какими должны быть размеры площадки, чтобы на постройку заборов пошло наименьшее количество материала?

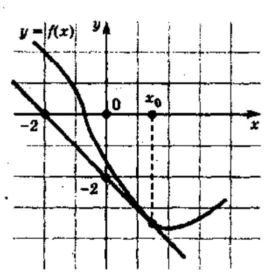
Вариант 2.

а) Функция спроса на некоторый товар имеет вид: $q=148-6p$. 1) найдите выражение для коэффициента эластичности спроса и его значение при $p_1 = 8$ и $p_2 = 15$.Прокомментируйте полученный результат; 2) исследуйте динамику выручки продавцов.

б) Около стены нужно сделать забор, чтобы огородить прямоугольный участок земли наибольшей площади. Каковы размеры участка, если длина забора 60 м?

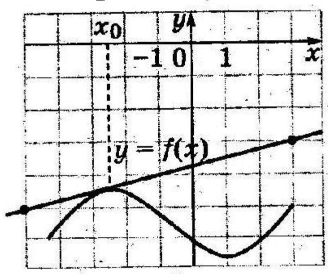
Задание 5. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции в точке x_0.

Вариант 1.



$x_0 = -2$

Вариант 2.



Практическая работа 4

ТЕМА: Вычисление производных высших порядков.

ЦЕЛЬ: Закрепить навыки нахождения производных второго порядка.

УМЕНИЯ И НАВЫКИ:

- знать определение второй производной;
- знать формулы производных функции;
- уметь находить производные второго порядка и применять их для

решения задач;

Теоретический материал

1. Понятие о производных высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема во всей области ее определения. Производная $y' = f'(x)$ от функции $y = f(x)$ называется *производной первого порядка,* или *первой производной.* Часто случается, что первая производная $y' = f'(x)$ также является дифференцируемой функцией от x. Тогда производная от первой производной называется **второй производной** или *производной второго порядка* функции $y = f(x)$ и обозначается y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; читается "игрек два штриха", "эф два штрих от икс", "де два игрек по де икс квадрат". Таким образом,

$$y'' = (y')', \quad f''(x) = (f'(x))', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Пример 1. Найти вторую производную функции

$$y = x^5 - 2x^3 + x - 3$$

Решение: Находим $y' = (x^5 - 2x^3 + x - 3)' = 5x^4 - 6x^2 + 1$,

Затем $y'' = (y')' = (5x^4 - 6x^2 + 1)' = 20x^3 - 12x$.

Производная от второй производной функции $y = f(x)$, если она существует, называется **производной третьего порядка** или *третьей производной, она обозначается*

$$y''' = (y'')', \quad f'''(x) = (f''(x))', \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{d^2x}\right).$$

Производной n-го порядка (или *n –й производной)* функции $y = f(x)$, если она существует, называется производная от производной (n-1) – порядка;

$$y^n = \left(y^{(n-1)}\right)^1, \qquad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)^1, \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Пример 2. Найти производную n-го прядка функции $y = e^{Rx}$

Находим

$$y' = (e^{Rx})' = Re^{Rx}; \qquad y'' = (Re^{Rx})' = R^2e^{Rx};$$

$$y''' = (R^2e^{Rx})' = R^3e^{Rx}.$$

Вообще,

$$Y^n = R^ne^{Rx}. \ \blacktriangle$$

2. Механический смысл второй производной. Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $s = f(t)$. Тогда, скорость движения в момент времени $v(t)$ определяется по формуле

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

В свою очередь, скорость $v\ (t)$ также есть функция от времени t. Тогда производная $v'\ (t) = (s'\ (t))' = s''\ (t) = \frac{d^2s}{dt^2}$,

Если она существует, определяет скорость изменения скорости материальной точки, движущейся по закону $s = f\ (t)$. Но, как известно из механики, скорость изменения скорости называется ускорением и обозначается $a\ (t)$. Таким образом, *ускорение $a\ (t)$ прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равно первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени т.е.*

$$a\ (t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Пример 3. Тело движется прямолинейно по закону $s = 1 - 2t + t^2$
Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.
Находим
$v\ (t) = s'(t) = (1 - 2t + t^3)' = -2 + 3t^2$, $\quad v\ (3) = -2 + 3 \cdot\cdot 3^2 = 25$;
$a\ (t) = v'\ (t) = (-2 + 3t^2)' = 6t$, $\quad a(3) = 6 \cdot 3 = 18$. ▲

Вопросы для самопроверки

1. Как найти производную второго и более порядков?
2. В чем заключается физический смысл первой производной?
3. В чем заключается физический смысл второй производной

Задания для самостоятельной работы
Вариант 1
1. Найти производные
   1. $y = x^5 - 7x^3 + 3$. Найти $y^{(4)}$
   2. $y = \sin^2 x$. Найти y'''
2. Найти ускорение точки в указанные моменты времени t, если скорость точки, движущейся прямолинейно, определяется законом: $v\ (t) = t^3 - 2t$, $t = 2$.
3. Найти скорость и ускорение точки в указанные моменты времени t, движущейся прямолинейно по закону: $s\ (t) = t^2 - 6t + 8$, $t = 3$.
4. Найти момент времени t, в которой ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $s\ (t) = -t^3 - 3t^2 - 8$, равно нулю. Какова при этом скорость точки?

Вариант 2
1. Найти производные
   a) $y = \ln|x|$ Найти $y^{(5)}$
   b) $y = (4x^2 + 3x + 1)^3$. Найти y''
2. Найти ускорение точки в указанные моменты времени t, если скорость точки, движущейся прямолинейно, определяется законом: $v(t) = 2\sin\ (t/2)$ $t = 2\pi/3$. 3.

Найти скорость и ускорение точки в указанные моменты времени t, движущейся прямолинейно по закону: $s(t) = \sin(\pi t/4)$, $t = 1$.
4. Тело массой m движется по закону $s(t) = 3t^2 - 5t + 7$. Доказать, что сила, действующая на точку, постоянна.

Вариант 3
1. Найти производные
 a) $y = 3^x$ Найти $y^{(4)}$
 b) $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln|x|-3)$. Найти y''
2. Найти ускорение точки в указанные моменты времени t, если скорость точки, движущейся прямолинейно, определяется законом: $v(t) = t^3 - 2t^2 + t$, $t = 2$;.
3. Найти скорость и ускорение точки в указанные моменты времени t, движущейся прямолинейно по закону: $s(t) = -\cos(\pi t/3)$, $t = 1$.
4. Доказать, что если тело движется по закону $s(t) = ae^t + be^{-t}$, то его ускорение равно пройденному пути.

Практическая работа №5
ТЕМА: Неопределенный интеграл

ЦЕЛЬ: научиться научить находить первообразную
УМЕНИЯ И НАВЫКИ:
- *знать* формулы и приемы интегрирования
- *уметь* применять полученные знания при решении задач.

Теоретический материал

Пример 1. Найти

а) $\int (5x^4+8x^3-9x^2+2x-7)dx$ *б)* $\int \frac{3x^2-5x^4+4x^2-5}{x^2}dx$

в) $\int \frac{dx}{9x^2+16}$ *г)* $\int x^2(2x^3+3)^4 dx$

д) $\int \frac{3\cos x dx}{1+2\sin x}$ *е)* $\int x\sin x dx$

Решение:

Для нахождения интегралов воспользуемся свойствами интеграла и таблицей интегралов:

Свойства неопределенного интеграла:

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)\quad; \qquad\qquad d\int f(x)dx = f(x)dx$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной, то есть

$$\int dF(x) = F(x) + C\ .$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int K\cdot f(x)dx = K\cdot\int f(x)dx$$, где K – некоторое число

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции:

$$\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Таблица интегралов:

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (n ¿−1)
3. $\int \frac{dx}{x^n} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ $(n\neq 1)$	4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
5. $\int \sqrt{x}dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$	6. $\int \sqrt[n]{x^m}dx = \frac{nx\sqrt[n]{x^m}}{m+n} + C$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	8. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}{n-m} + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln\alpha} + C$	10. $\int e^x dx = e^x + C$
11. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	12. $\int \cos x dx = \sin x + C$
13. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
15. $\int tgxdx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	16. $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$	18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

21. $\int \frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C$	22. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
23. $\int \frac{dx}{x^2-a}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$	24. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+C$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$	

а) $\int\left(5x^4+8x^3-9x^2+2x-7\right)dx$ $=$ $\int(5x^4dx+\int 8x^3dx-\int 9x^2dx+\int 2xdx-\int 7dx$ $=$

$=$ $5\int x^4dx+8\int x^3dx-9\int x^2dx+2\int xdx-7\int dx$ $=$

$\frac{5x^5}{5}+\frac{8x^4}{4}-\frac{9x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-7x+C$ $=$ $x^5+2x^4-3x^3+x^2-7x+C$

б) Подынтегральную функцию представим в виде суммы дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{3x^2-5x^4+4x-5}{x^2}=\frac{3x^2}{x^2}-\frac{5x^4}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}=3-5x^2+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2},$$

тогда интеграл примет вид:

$$\int\frac{3x^2-5x^4+4x-5}{x^2}dx=\int\left(3-5x^2+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx$$

Применив свойства и формулы, получим:

$\int\left(3-5x^2+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx$ $=$ $3\int dx-5\int x^2dx+4\int\frac{dx}{x}-5\int\frac{dx}{x^2}$ $=$

$3x-\frac{5x^3}{3}+4\ln x+\quad+\frac{5}{x}+C$.

в) Приведем его к табличному интегралу

$\int\frac{dx}{9x^2+16}$ $=$ $\int\frac{dx}{9\left(x^2+\frac{16}{9}\right)}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2+\frac{16}{9}}$ $=$ $\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{16}arctg\frac{9}{16}+C$ $=$

$\frac{1}{16}arctg\frac{9}{16}+C$.

г) Данный интеграл не удается найти непосредственно, поэтому применим **метод подстановки**, который заключается в том, что путем введения новой переменной интегрирования данный интеграл удается свести к новому, который легко берется непосредственно.

Пусть $2x^3+3=t$; найдем дифференциалы от обеих частей по соответствующей переменной $(2x^3+3)'dx=t'dt$ или $6x^2dx=dt$; из полученного выражения выразим остальную часть подынтегрального выражения, т.е. x^2dx, $x^2dx=\frac{dt}{6}=\frac{1}{6}dt$; заменим всё подынтегральное выражение через новую переменную и применим свойство 3 и формулу 2, получим:

$$\int x^2(2x^3+3)^4dx=\int t^4\cdot\frac{1}{6}dt=\frac{1}{6}\int t^4dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{t^5}{30}+C$$

сделаем обратную замену, получим

$$\int x^2(2x^3+3)^4dx=\frac{(2x^3+3)^5}{30}+C.$$

д) Найдем методом подстановки

Пусть $1+2\sin x=t$, $(1+2\sin x)'dx=t'dt$ или $2\cos xdx=dt$, отсюда $\cos xdx=\frac{1}{2}dt$, тогда

$$\int\frac{3\cos xdx}{1+2\sin x}=\int\frac{3\cdot\frac{1}{2}dt}{t}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{3}{2}\ln t+C=\frac{3}{2}\ln(1+2\sin x)+C.$$

е) Найдем интеграл, используя формулу **интегрирования по частям**:

$$\int udv=uv-\int vdu,$$

где u и v - некоторые функции от x.

Обозначим $u = x$, $dv = sinxdx$, находим du и v: $du = dx$, $v = \int sinxdx=-cosx$, тогда $\int xsinxdx=-xcosx+\int cosxdx=-xcosx+sinx+C$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется неопределенным интегралом от данной функции? Назовите его свойства.
2. Назовите методы нахождения неопределённого интеграла.
3. Как найти интеграл методом подстановки?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти интегралы:

Вариант 1	*Вариант 2*
$\int\frac{(2\sqrt{x}+1)^2dx}{x\sqrt{x}}$	$\int\frac{(x^2-16)dx}{\sqrt{x}+2}$
$\int\frac{dx}{9x^2-1}$	$\int\frac{dx}{4x^2+25}$

$\int \frac{xdx}{3x^2+1}$	$\int \frac{x^4 dx}{2-x^5}$
$\int (2x^3-5)^2 x^2 dx$	$\int x^2 (3x^3-2)^4 dx$
$\int \frac{xdx}{(5x^2+1)^2}$	$\int \frac{\cos x dx}{(3\sin x+1)^2}$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{1nx+3}}$	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^3}}$
$\int \sin x \cos^2 x dx$	$\int \sin^3 x \cos x dx$
$\int \frac{4\cos x dx}{3\sin x+1}$	$\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$
$\int x e^{-2x} dx$	$\int \ln(x+2) dx$

Практическая работа № 6,7
ТЕМА: Определенный интеграл и его приложения

ЦЕЛЬ: научиться решать задачи с помощью определенного интеграла, вычислять приближенное значение определенного интеграла

УМЕНИЯ И НАВЫКИ:

- *знать* формулы и приемы интегрирования
- *уметь* применять полученные знания при решении практических задач.

Теоретический материал

Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a),$$

где a – нижний предел интегрирования, b – верхний предел интегрирования, $a \le x \le b$- отрезок интегрирования, $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$

Пример 1. Вычислите:

а) $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$ *б)* $\int_{2\sqrt{2}}^4 3x\sqrt{x^2-7}\,dx$

в) $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{(x^3+2)^2}$ *г)* $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{1-\cos x}$

Решение:

Вычислим определенные интегралы методом введения новой переменной интегрирования.

а) Пусть $8-x=t$, дифференциалы от обеих частей равны $(8-x)^{'}dx=t^{'}dt$ или $dx=-dt$. Определим пределы интегрирования для переменной *t*. При $x=0$ получаем $t_{н}=8-0=8$, при $x=7$ получаем $t_{в}=8-7=1$.

Выразив подынтегральное выражение через *t* и *dt,* и перейдя к новым пределам интегрирования, получим

$$\int_{0}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}=\int_{8}^{1}\frac{-dt}{\sqrt[3]{t^2}}=\int_{1}^{8}\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}=3\cdot\sqrt[3]{t}\Big|_{1}^{8}=3\cdot\left(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{1}\right)=3$$.

б) Пусть $x^2-7=t$, дифференциалы от обеих частей равны $(x^2-7)^{'}dx=t^{'}dt$ или $2xdx=dt$, а $xdx=\frac{1}{2}dt$. Определим пределы интегрирования для переменной *t*. При $x=2\sqrt{2}$ получаем $t_{н}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-7=1$, при $x=4$ получаем $t_{в}=4^2-7=9$. Переходя к новой переменной, получим

$$\int_{2\sqrt{2}}^{4}3x\sqrt{x^2-7}\,dx=3\cdot\int_{1}^{9}\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_{1}^{9}=9\cdot\sqrt{9}-1\cdot\sqrt{1}=26$$.

в) Пусть $x^3+2=t$, дифференциалы от обеих частей равны $(x^3+2)^{'}dx=t^{'}dt$ или $3x^2dx=dt$, а $x^2dx=\frac{1}{3}dt$. Определим пределы интегрирования для переменной *t*. При $x=1$ получаем $t_{н}=1+2=3$, при $x=2$ получаем $t_{в}=8+2=10$. Переходя к новой переменной, получим

$$\int_{1}^{2}\frac{x^2dx}{(x^3+2)^2}=\frac{1}{3}\int_{3}^{10}\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{3t}\Big|_{3}^{10}=\frac{1}{3t}\Big|_{10}^{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)=\frac{7}{90}$$.

г) Пусть $1-\cos x=t$, дифференциалы от обеих частей равны $(8-x)^{'}dx=t^{'}dt$ или $dx=-dt$. Определим пределы интегрирования для переменной *t*. При $x=\frac{\pi}{2}$ получаем $t_{н}=1-\cos\frac{\pi}{2}=1$, при $x=\pi$ получаем $t_{в}=1-\cos\pi=2$. Переходя к новой переменной, получим

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin xdx}{1-\cos x}=\int_{1}^{2}\frac{dt}{t}=\ln x\Big|_{1}^{2}=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$.

Если интегрируемая на отрезке $a \le x \le b$ функция $f(x)$ неотрицательна, то определенный интеграл численно равен **площади S криволинейной трапеции**, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

При вычислении площади криволинейной трапеции:

1) определяем границы фигуры, площадь которой нужно найти;
2) выполняем рисунок;
3) вычисляем площадь криволинейной трапеции с помощью формулы Ньютона – Лейбница.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$V = \int_a^b y^2 dx.$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$V = \int_a^b x^2 dy$$

При вычислении объёма тела вращения:

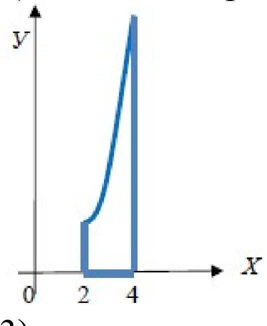
1) определяем границы тела, объём которого нужно найти;
2) выполняем рисунок;
3) вычисляем объём с помощью формулы

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2$, прямыми $x = 2$, $x = 4$ и осью абсцисс.

Решение:

1) $x = 2$, $x = 4$ – границы фигуры (относительно оси Ox), площадь которой нужно найти;

2) выполняем рисунок:



3) вычисляем площадь:

$$S = \int_2^4 3x^2 dx = 4^3 - 2^3 = 64 - 8 = 56.$$

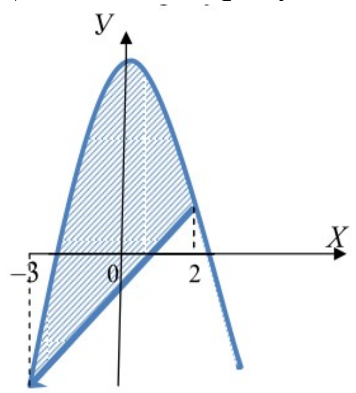
Ответ: 56 ед^2.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 5 - x^2$ и $y = x - 1$.

Решение:

1) определяем границы фигуры, площадь которой нужно найти, решив систему:
$\begin{cases} y=5-x^2 \\ y=x-1 \end{cases}$, отсюда $5 - x^2 = x - 1$; $-x^2 - x + 6 = 0$; $x_1 = -3$; $x_2 = 2$.

2) выполняем рисунок:



3) вычисляем площадь:

$$S = \int_{-3}^{2} \left(\left(5-x^2\right)-(x-1)\right) dx = \int_{-3}^{2} (6-x^2\text{¿¿}-x)\,dx\,\text{¿¿} = \left(6x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{2} = 20\frac{5}{6}$$

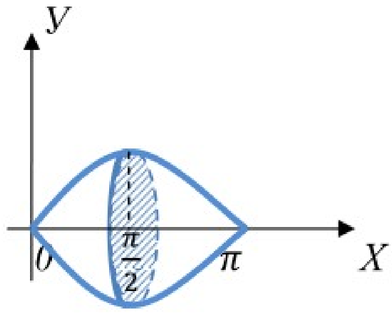
Ответ: $20\frac{5}{6}$ $ед^2$.

Пример 4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры,
ограниченной синусоидой y = sin x и отрезком $0 \le x \le \pi$ оси абсцисс.

Решение:

1) $x = 0$, $x = \pi$ – границы тела вращения;

2) выполняем рисунок;



3) вычисляем объём: $V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \pi\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$

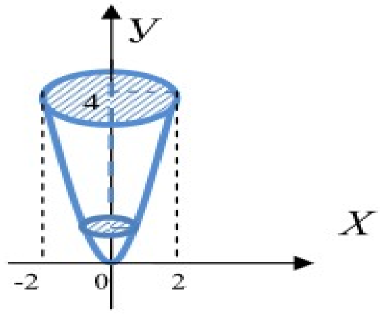
Ответ: $\frac{\pi^2}{2}$ ед^3.

Пример 5. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной ветвью параболы $y = x^2$ и отрезком $1 \le y \le 4$ оси ординат.

Решение:

1) $y = 1$, $y = 4$ – границы тела вращения, выразим *x* через *y*: $x=\sqrt{y}$

2) выполняем рисунок;



3) вычисляем объём: $V=\pi\int_1^4(\sqrt{y})^2dy=dx=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_1^4=7{,}5\pi$

Ответ: 7,5π ед^3.

Если точка движется прямолинейно и со скоростью $v(t)$,то **путь**, пройденный точкой за промежуток времени $t_1\le t\le t_2$, **вычисляется по формуле**

$$s=\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt$$

Если переменная сила $F(x)$ действует в направлении оси Ox, то **работа силы** на отрезке $a\le x\le b$ **вычисляется по формуле**

$$A=\int_a^b F(x)dx$$

Пример 6. Сила 196,2Н растягивает пружину на 18см. Какую работу она производит?

Решение:

По закону Гука, $F = kx$, откуда $k=\frac{F}{x}=\frac{196{,}2}{0{,}18}=1090\frac{Н}{м}$. Значит $F = 1090x$. Находим работу $A=\int_0^{0{,}18}1090\,xdx\approx17{,}7\,Дж$

На практике часто встречаются интегралы, которые нельзя выразить через элементарные функции или выразить очень сложно. В этих случаях интеграл находят приближенно с использованием методов численного интегрирования. Отрезок интегрирования делят точками x_i на n равных частей

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Длина каждого $h=\frac{b-a}{n}$. Обозначим через $y(i)$ значения функции в точках x_i и используют формулы:

Формулы прямоугольников

1. $$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\big(y(0)+y(1)+y(2)+\ldots+y(n-1)\big)$$

2. $$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\big(y(1)+y(2)+\ldots+y(n)\big)$$

3. $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(y\left(\frac{1}{2}\right)+y\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+y\left(\frac{2n-1}{2}\right)\right)$$

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y(0)+y(n)}{2}+y(1)+y(2)+\ldots+y(n-1)\right)$$

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}\left(\frac{y(0)+y(n)}{2}+y(1)+y(2)+\ldots+y(n-1)+2\left(y\left(\frac{1}{2}\right)+y\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+y\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)\right)$$

Пример 7. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формулам прямоугольника и трапеции

Решение:

Пусть n = 10, тогда h = 0,1.

Составим таблицу значений подынтегральной функции:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	1	0,9901	0,9615	0,9174	0,8621	0,80	0,7353	0,6711	0,6098	0,5525	0,5

$$\sum_{i=1}^{9} y_i = 7,0998 \qquad . \qquad \sum_{i=1}^{10} y_i = 7,5998$$

По формуле прямоугольников $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ = 0,75998;

по формуле трапеции $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ = 0,1 (7,5 + 7,0998) = 0,78498;

по формуле Ньютона-Лейбница находим точное значение

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ = arctg $x\Big|_0^1$ = arctg1 - arctg0 = $\frac{\pi}{4}$ = 0,785398.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется определённым интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке [a; b]? Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

2. Перечислите основные свойства определённого интеграла и методы его вычисления.
3. Каков геометрический смысл определённого интеграла?
4. Как вычислить объём тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси *Ox*? оси *Oy*?
5. В чем заключается физический смысл определенного интеграла?
6. По каким формулам вычисляется приближенное значение определенного интеграла?
7. Как вычислить абсолютную, относительную погрешность приближенного вычисления?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти интегралы:

Вариант 1. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3+\cos x)^2 \sin x dx$; б) $\int_{2\sqrt{2}}^{4} 3x\sqrt{x^2-7}\,dx$; в) $\int x e^{-2x} dx$.

Вариант 2. а) $\int (2x^3-5)^2 x^2 dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{2\cos x+3}$; в) $\int \ln(x+2)\,dx$.

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями (сделайте рисунок):

Вариант 1. $y=x^2-2x+3$; $y=-x+5$.

Вариант 2. $y=x^2+2x-3$; $y=x+3$.

Задание 3. Найти объём тела вращения фигуры, ограниченной линиями (сделайте рисунок):

Вариант 1. $y = x^2 + 1$, $y = 2$, $y = 5$, полученной вращением вокруг оси *Oy*.

Вариант 2. $y = 4 – x$, $x = – 1$, $x = 2$, полученной вращением вокруг оси *Ox*.

Задание 4. Решите задачи:

Вариант 1.

а) Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v(t) = 39{,}2 – 9{,}8t$ (v – *м/с*). Вычислите наибольшую высоту подъема.

б) При сжатии пружины на 4 см необходимо совершить работу 16 Дж. Какую работу надо произвести для сжатия пружины на 10 см?

Вариант 2.

а) Скорость прямолинейного движения тела задана уравнением $v(t) = 9t^2 + 20t$ (v – *м/с*). Вычислите его путь, пройденный за четвертую секунду.

б) Вычислите работу, которую нужно совершить при растяжении пружины на 8 см, если сила 10Н растягивает пружину на 1см.

Задание 5. Опытный участок имеет форму криволинейной трапеции, ограниченной параллельными сторонами и верхним основанием в виде ломаной линии, выраженной функцией. Определите площадь опытного участка способами:

а) приближенного вычисления;

б) точных расчетов (по формуле Ньютона-Лейбница).
Вычислите абсолютную и относительную погрешности в расчетах.

Вариант 1. $\int_0^1 2x dx$, используя формулу трапеции.

Вариант 2. $\int_1^2 3x dx$, используя формулу прямоугольника.

Практическая работа 8
ТЕМА Решение задач дискретной математики.

ЦЕЛЬ. Научить выполнять операции над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна и логические операции над высказываниями.

УМЕНИЯ И НАВЫКИ:

- *знать* определения операций над множествами и элементы математической логики;
- *уметь* строить диаграммы Эйлера-Венна; выполнять логические операции над высказываниями таблицей.

Теоретический материал

Универсальным множеством *U* называется множество всех элементов, которые могут встретиться в данном исследовании. Диаграмма Эйлера-Венна представляет собой прямоугольник, обозначающего множество *U*, а внутри него – кругов или других замкнутых фигур, соответствующих рассматриваемым множествам. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, можно рассматривать как элементы соответствующих множеств.

Объединением двух множеств *A* и *B* (обозначается $A \cup B$¿ называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств *A* и *B (рис. 4)*.

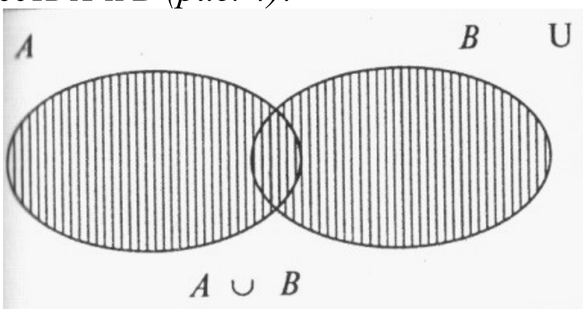


Рис. 4

Пересечением двух множеств *A* и *B* (обозначается $A \cap B$¿ называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих и множеству *A,* и множеству *B (рис. 5)*.

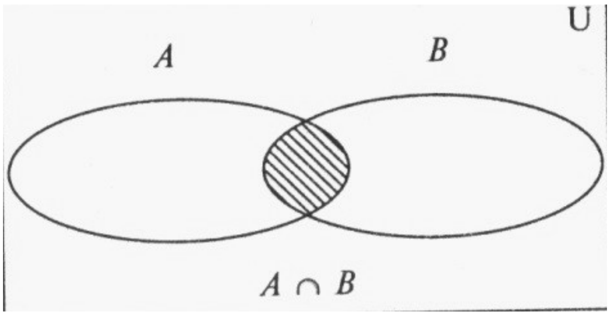


Рис. 5

Дополнением (до *U*) множества *A* (обозначается *Á*) называется множество всех элементов, не принадлежащих *A*, но принадлежащих *U (рис. 6)*.

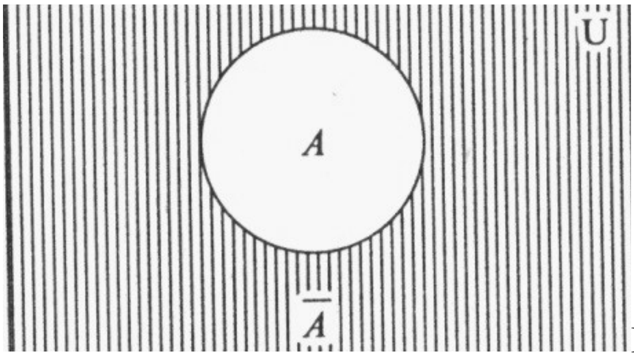


Рис. 6

Разностью двух множеств *A* и *B* (обозначается *A*¿¿ называется множество элементов *A*, которые не содержатся во множестве *B*. (*рис 7*)

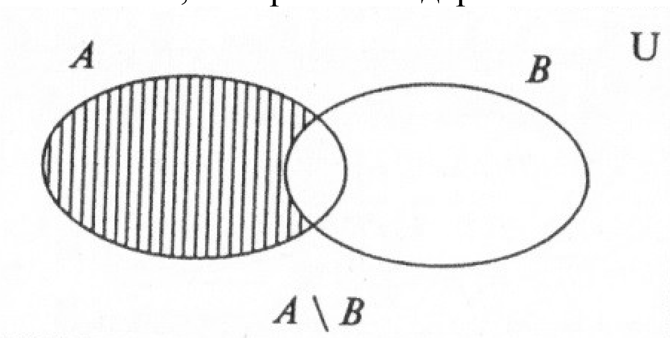


Рис. 7

Пример 1. Даны множества U ={1,2,3,4,5,6,7,8}, A = {1,3,5,7}, B = {2,4,6,7}, C = {1,4,6,8}. Показать, что *A*(*B*∪*C*¿ = (*A*¿¿¿.

Решение:

$B \cup C$ = {1,2,4,6,7,8}, *A*(*B*∪*C*¿ = {3,5}

A¿ = {1,3,5}, (*A*¿¿¿ = {3,5}. Итак, *A*(*B*∪*C*¿ = (*A*¿¿¿.

Под высказываниями понимают любое повествовательное предложение, которое истинно или ложно. Истинные высказывания обозначаются буквой *И* или цифрой 1, а ложные буквой *Л* или цифрой 0. Простейшие логические операции над высказываниями:

Конъюнкция (операция «и», логическое произведение) двух элементарных высказываний *A* и *B* – новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания истинны и ложны в остальных случаях, обозначается A^B, читается «A и B», описывается таблицей:

A	B	A∧B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкция (операция «или», логическая сумма) двух элементарных высказываний *A* и *B* – новое высказывание, которое считается ложным, если оба высказывания ложны и истинны в остальных случаях, обозначается A∨B, читается «A или B», описывается таблицей:

A	B	A∨B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Отрицание (инверсия) высказывания *A* – новое высказывание, которое является истинным, если высказывание *A* ложно, и ложным, если высказывание *A* истинно. Обозначается $\acute{A}$ и читается «не *A*» или «неверно, что *A*», описывается с помощью таблицы

A	$\acute{A}$
1	0
0	1

Импликация (логическое следование) двух высказываний *A* и *B* – новое высказывание, которое считается ложным, если *A* истинно, а *B* – ложно, и истинным во всех остальных случаях. Обозначается символом $A \rightarrow B$, читается «если *A*, то *B*» или «из *A* следует *B*». Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности:

A	B	A→B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквивалентность (двойная импликация) двух высказываний *A* и *B* – новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях. Обозначается символом $A \leftrightarrow B$, читается «для того, чтобы *A*, необходимо и достаточно, чтобы *B*» или «*A* тогда и только тогда, когда *B*». Логические значения операции эквивалентности описываются следующей таблицей истинности

A	B	A↔B
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	1

Порядок выполнения операций указывается скобками, которые можно опустить, придерживаясь следующего порядка действий: конъюнкция выполняется раньше, чем все остальные операции, дизъюнкция раньше, чем импликация и эквивалентность. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

Пример 2. С помощью таблиц истинности проверить справедливость равенства: $A \to B = \acute{A \wedge \acute{B}}$

Решение: составим таблицу:

A	B	$\acute{B}$	$A \to B$	$A \wedge \acute{B}$	$\acute{A \wedge \acute{B}}$
1	1	0	**1**	0	**1**
1	0	1	**0**	1	**0**
0	1	0	**1**	0	**1**
0	0	1	**1**	0	**1**

Вопросы для самопроверки

1. Какое множество называется конечным?
2. Какое множество называется бесконечным?
3. Какое множество называется пустым?
4. Перечислите операции над множествами
5. Дайте определение операциям над множествами
6. Что понимаем под высказываниями?
7. Какие логические операции выполняются над множествами?
8. Дайте определение логическим операциям над множествами
9. Каков порядок выполнения логических операций?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Даны множества $U = \{1,2,7,13,8,9,5,11\}$, $A = \{1,7,8,5\}$, $B = \{2,13,9,5\}$,
$C = \{1,13,9,11\}$. Упростите выражения

1 вариант $\acute{A ¿ B \cup C ¿} A \cap \acute{B} \cap C \cup A \cap B \cap C$

2 вариант $\acute{A} ¿ B \cap C ¿ \cap \acute{B} \cap C \cup A \cup B \cap C$

Задание 2. С помощью диаграмм Эйлера-Венна упростите выражения

1 вариант. $\acute{A} \cup (A ¿ B) \cup (\acute{A} ¿ B)$

2 вариант. $A \cup (A \acute{\cup} \acute{B}) \cup \acute{B}$

Задание 3. С помощью таблиц истинности проверьте равенство

1 вариант. $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\acute{A} \wedge \acute{B})$

2 вариант. $A \leftrightarrow B = (\acute{A} \vee B) \wedge (A \vee \acute{B})$

Практическая работа 9
ТЕМА Вероятность события.

ЦЕЛЬ. Научить вычислять вероятность события.

УМЕНИЯ И НАВЫКИ:

- *знать* теоремы сложения, умножения вероятностей, формулы полной вероятности, Бейеса, Бернулли;
- *уметь* применять теоремы и формулы для вычисления вероятности.

Теоретический материал

Теория вероятностей – это математическая наука, которая изучает закономерности в случайных событиях. К основным понятиям теории вероятностей относятся испытания и события.

Под ***испытанием*** (опытом) понимают реализацию данного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие. Например, бросание монеты – испытание; появление герба или цифры – событие.

Случайным называется событие, связанное с данным испытанием, которое при осуществлении испытания может произойти, а может и не произойти. Например, выстрел по цели – это опыт, случайные события в этом опыте – попадание в цель или промах.

Событие в данных условиях называются ***достоверным,*** если в результате опыта оно непременно должно произойти, и ***невозможным,*** если оно заведомо не произойдет. Например, выпадение не более шести очков при бросании одной игральной кости – достоверное событие; выпадение 7 очков при бросании одной игральной кости – невозможное событие.

События называются ***несовместными,*** если никакие два из них не могут появляться вместе. Например, попадание и промах, при одном выстреле – это несовместные события.

События называются *равновозможными,* если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие. Например, при бросании монеты выпадение герба или числа – события равновозможные.

Говорят, что несколько событий в данном опыте образуют полную систему событий, если в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них. Например, при бросании игральной кости события, состоящие в выпадении одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков, образуют полную систему событий. Пусть A - случайное событие, связанное с некоторым опытом. Повторим опыт n раз в одних и тех же условиях и пусть при этом событие A появилось m раз. Отношение $\frac{m}{n}$ – ***называется частотой события*** A. При многократном повторении опыта частота события принимает значения, близкие к некоторому постоянному числу. Числовая мера степени объективной возможности события – это вероятность события. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Пусть из системы n несовместных равновозможных исходов испытания m исходов благоприятствуют событию A. ***Тогда вероятностью события А*** называют отношение m числа исходов, благоприятствующих событию A к числу всех исходов данного испытания:

$P(A) = \frac{m}{n}$. Если A - случайное событие, то m ¿ n и $P(A) < 1$;

Эта формула носит название ***классического определения вероятности.*** Если B – достоверное (или невозможное) событие, то $m = n$ и $P(B) = 1$. Таким образом, вероятность события заключается в следующих пределах: 0 ¿ $P(A)$ ¿1 .

Независимость случайных событий. Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменит вероятности события B. Если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события B; это означает, что свойство независимости взаимно. Несколько событий называют попарно независимым, если каждые два события независимы.

Суммой $A + B$ двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении события A, или события B. или обоих этих событий. Например, если из орудия произведены два выстрела и A – попадание при первом выстреле, B – попадание при втором выстреле, то $A + B$ – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах. Если события A и B– несовместные, то $A + B$ – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Вероятность появления одного из двух несовместимых событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = (A) + P(B)$.

Произведением двух событий A *и* B называют событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий. Например, если A – деталь годная, B – деталь окрашенная, то AB – деталь годна и окрашена.

Условной вероятностью $P(A|B)$ называют вероятность события B вычисленную в предположении, что событие A уже наступило. Условная вероятность события B при условии, что событие A уже наступило, по определению, равна:

$$P(A|B) = \frac{p(AB)}{p(A)}$$

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предложении, что первое событие наступило:
$P(AB)=P(A)*P(A|B)$.

Пример 1. В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что он черный?

Решение:

Событие A – вынутый шар черный, всего возможных событий $n = 12$, а число благоприятствующих событий $m = 9$, тогда вероятность события A

$P(A) = \frac{9}{12} = 0,75$ или 75%

Пример 2. В партии 12 деталей из них 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наугад деталей 4 стандартных (событие A)

Решение:

Число всех событий $n = C_{12}^{6}$ а, среди 6 взятых будут 4 стандартных и 2 нестандартных деталей. Каждая комбинация стандартных деталей будет сочетаться с нестандартными деталями, поэтому $m = C_7^4 \cdot C_5^2$, тогда

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_5^2}{C_{12}^6} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot5\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{25}{66} \approx 0,38$$

Пример 3. Вероятность всхожести семян равна 0,9. Какова вероятность того, что из 4 посеянных взойдут

а) не менее 3; б) 3 семени

Решение:

Событие A – из 4 семян взойдут не менее 3 – это значит взойдут 3 или 4 семени. События независимые, вероятность каждого определим по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$.

Тогда вероятность события A

$$P(A) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^1 + C_4^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^0 = \frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3} \cdot 0,9^3 \cdot 0,1 + \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \cdot 0,9^4 = 0,9^3\,(0,4 + 0,9) = 0,95.$$

Событие B – взойдут 3 семени найдем по формуле Бернулли

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^1 = 0,29$$

Пример 4.. В учебных мастерских на 3-х станках изготовляют соответственно 25%, 35% и 40% всех деталей. В их продукции брак составляет соответственно 15%, 12% и 6%. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь дефекта (событие A).

Решение:

Обозначим события

H_1 – деталь изготовлена на 1-м станке

H_2 – деталь изготовлена на 2-м станке

H_3 – деталь изготовлена на 3-м станке

События H_1, H_2 и H_3 образуют полную систему попарно несовместных событий и их вероятности $P(H_1) = 0,25$, $P(H_2) = 0,35$ и $P(H_3) = 0,4$. Процент изготовления брака является условными вероятностями события A при условии событий H_1, H_2, H_3, т.е.

$P(A|H_1) = 0,15$ $\quad$ $P(A|H_2) = 0,12$ $\quad$ $P(A|H_3) = 0,06$

По формуле полной вероятности

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)*P(A|H_i)$ находим $P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}15 + 0{,}35 \cdot 0{,}12 + 0{,}4 \cdot 0{,}06 = 0{,}10$

Пример 5. На склад поступают детали с завода №1 и №2. Вероятность того, что деталь стандартна для завода №1 равна 0,8, для завода №2 – 0,6.

Найти вероятность того, что взятые детали с каждого завода будут а) стандартные; б) хотя бы одна деталь стандартна; в) только одна деталь стандартна.

Решение:

а) Событие A – обе детали стандартные

A_1 – деталь с завода №1

A_2 – деталь с завода №2

События A_1 и A_2 – независимые, следовательно,

$P(A) = P(A_1) * P(A_2) = 0.8 * 0{,}6 = 0{,}48$

б) Событие B – хотя бы одна деталь стандартна

События B_1 – обе детали стандартны;

B_2 – стандартная деталь с завода №1;

B_3 – стандартная деталь с завода №2/

$P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$

$P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)+P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})$ = 0,8 ·0,6 + 0,6 ·0,2 + 0,8 ·0,4= = 0,92

в) Событие C – только одна деталь стандартная

$P(B)=P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)+P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})$ = 0,8 · 0,4 + 0,2 · 0,6 = 0,44

Пример 6. Вероятность того, что на странице рукописи есть опечатка, равна 0,2. Найти вероятность того, что на 400 стр. будет 104 опечатки.

Решение: При больших значениях и значении $P_n(k)$ можно вычислять по локальной формуле Лапласа

$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x)$ ·, где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

Значения функции $\phi(x)$ находят по таблице (приложение 1), при этом $\phi(-x)=\phi(x)$

$q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ $\qquad$ $x = \frac{104-30}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=3$

ϕ (3) = 0,0044, тогда $P_{400}(104) = \frac{0{,}0044}{8}$ = 0,00055 или 0,06%

Пример 7. Процент всхожести семян 90%. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

Решение: Если вероятность наступления события A в каждом из n испытаний постоянна и равна p, то вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что событие A в таких испытаниях наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз определяется по формуле $P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, где $\alpha = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $\beta = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)$ называется функцией Лапласа, которую находят по таблице (Приложение 2). При x > 5 $\Phi(x) = 0{,}5$. При отрицательных значениях x $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. По условию задачи имеем n = 500; p=0,9; q = 0,1; k_1 =400; k_2=440. Найдем значения α и β: $\alpha = \frac{400 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -7{,}45$;

$\beta = \frac{440 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -1{,}49$. $\Phi(-7{,}45) = 0{,}5$; $\Phi(-1{,}49) = -0{,}4319$. Тогда $P_{500}(400 \le k \le 440) = -0{,}4319 + 0{,}5 = 0{,}0681$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется событием? Приведите примеры достоверных, невозможных событий.
2. Какие события называются несовместными? совместными? противоположными?
3. Как вычислить вероятность события, используя её классическое определение?
4. Что называется условной вероятностью?
5. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
6. Напишите формулу полной вероятности.
7. Как найти наивероятнейшее число наступлений события при повторных испытаниях?
8. Напишите формулу Бернулли. В каких случаях она применяется?
9. Сформулируйте локальную и интегральную теоремы Лапласа.
10. Напишите формулу Пуассона. В каких случаях она применяется?

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

1. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6, вторым — 0,7, третьим — 0,8. Найти вероятность того, что три одном выстреле попадут в цель: а) все три стрелка; б) попадет хотя бы один из них.

2. В ящике лежат 20 электрических лампочек, из которых 2 нестандартные. Найти вероятность того, что наугад взятые две лампочки окажутся стандартными.

3. Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта — 50%, 'третьего сорта — 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта, равна 0,8, второго—0,5, третьего—0,3. Найти вероятность того, что взойдет наугад взятое зерно.

4. Семена пшеницы содержат 0,2% сорняков. Найти вероятность того, 'что в 1000 семян будет 6 семян сорняков.

5. Масса яблока, средняя величина которой равна 150 г, является нормально распределенной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 20 г. Найти вероятность того, что масса наугад взятого яблока будет заключена в пределах от 130 г до 180 г.

Вариант 2.

1. Вероятность попадания в цель при одним выстреле равна 0,7. Производится 4 выстрела. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) три раза; б) не более двух раз

2. В магазин поступили телевизоры из трех заводов. Вероятность того, что телевизор изготовлен на первом заводе, равна 0,3, на втором — 0,2, на третьем — 0,5. Вероятность того, что телевизор окажется бракованным, для первого завода равна 0,2, для второго — 0,1, для третьего — 0,3. Найти вероятность того, что наугад взятый телевизор окажется небракованным.

3. Из 200 рабочих норму выработки не выполняют 15 человек. Найти вероятность того, что два случайно выбранных рабочих не выполняют норму.

4. Вероятность всхожести пшеницы равна 0,8. Какова вероятность того, что из 6 семян взойдет не менее 3?

5. Средний диаметр стволов деревьев на некотором участке равен 25 см, среднее квадратическое отклонение равно 6 см. Считая диаметр ствола случайной величиной, распределенной нормально, найти процент деревьев, имеющих диаметр свыше 20 см.

Практическая работа 10
ТЕМА Дискретная и непрерывная случайные величины.

ЦЕЛЬ. Научить строить закон распределения случайной величины.
УМЕНИЯ И НАВЫКИ:

- *знать* закон распределения случайной величины;
- *уметь* строить ряд распределения случайной величины; находить функцию распределения случайной величины; основные характеристики случайной величины.

Теоретический материал

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта принимает с определенной вероятностью то или иное значение, зависящее от исхода опыта.

Случайную величину называют **дискретной**, если множество её значений конечно или счетно, т.е. множество её значений представляет собой конечную последовательность.

Непрерывной случайной величиной называется величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного множества.

Соответствие между возможными значениями и их вероятностями называют законом распределения.

$$\frac{x|x_1|.\,x_2|\dots|x_n}{P|P_1|P_2|\dots|P_n}$$, где $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$

Пример 1. Составить закон распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равно 0,9.

Решение. Случайная величина х – число попаданий в цель при четырех выстрелах- может принимать значения 0,1,2, 3,4, а соответствующие им вероятности находим по формуле Бернулли

$P_n(m) = P(x = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где m = 0,1,2, …, n; $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$.

$P(X=0) = C_4^0 .0{,}9^0 .0{,}1^4 = 0{,}0001$

$P(X=1) = C_4^1 .0{,}9^1 .0{,}1^3 = 0{,}0036$

$P(X=2) = C_4^2 .0{,}9^2 .0{,}1^2 = 0{,}0486$

$P(X=3) = C_4^3 .0{,}9^3 .0{,}1 = 0{,}2916$

$P(X=4) = C_4^4 .0{,}9^4 .0{,}1^0 = 0{,}6561$

Итак, искомый закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	4
P	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

Функцией распределения случайной величины называют функцию *F(x)*, определяющую вероятность того, что в результате испытания случайная величина *x* примет значение меньшее *x*, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Числовыми характеристиками случайной величины служат математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех возможных значений на их вероятности.

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Частоту рассеяния случайной величины вокруг его среднего значения характеризует дисперсия. **Дисперсией** называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$D(x) = M[x - M(x)]^2$ или $D(x) = M(x^2) - M^2(x)$

Среднее квадратическое отклонение служит для характеристики рассеяния возможных значений случайной величины вокруг её среднего значения. $\sigma = \sqrt{D(x)}$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычисляется по формуле $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$, где *f(x)* – дифференциальная функция распределения *f(x) – F ′(x)*

Дисперсия $D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x)\,dx$

Пример 1. Дан закон распределения дискретной случайной величины.
Найти 1) математическое ожидание; 2) дисперсию и 3) среднее квадратическое отклонение

x	40	42	41	44
P	0,1	0,3	0,2	0,4

$\sum p_i$ = 0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,4 = 1

Решение:

1) Математическое ожидание

$M(x) = 40 \cdot 0,1 + 42 \cdot 0,3 + 44 \cdot 0,2 + 44 \cdot 0,4 = 42,4$

2) Дисперсия $D(x) = M(x^2) - M^2(x)$

$M(x^2) = 40^2 \cdot 0,1 + 42^2 \cdot 0,3 + 41^2 \cdot 0,2 + 44^2 \cdot 0,4 = 1799,8$

$D(x) = 1799,8 - 42,4^2 = 2,04$

3) $\delta = \sqrt{2,04 \approx 1,43}$ $\sigma = \sqrt{2,04} \approx 1,43$

Пример 2. Даны законы распределения случайных величин *X* и *Y*. Какая из величин более рассеяна

X	-8	-4	-1	1	3	7
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

Y	-2	-1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$

Решение: Найдем математическое ожидание

$M(X) = -2 \cdot \frac{1}{12} - 4 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

$M(Y) = -2 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

Математические ожидания равны, найдем их дисперсии

$D(X) = 64 \cdot \frac{1}{12} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{12} + 49 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = 8\frac{119}{144}$

$D(Y) = 4 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = 3\frac{11}{144}$

D(Y) < D(X), значит значения величины *X* более рассеяны относительно её математического ожидания *M(X)*

Пример 3. Непрерывная случайная величина задана интегральной функцией распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x<0 \\ x^3, \text{ при } 0\le x\le 1 \\ 1, \text{ при } x>1 \end{cases}$$

Найти

1) дифференциальную функцию распределения *f(x)*;
2) математическое ожидание *M(x)*;
3) дисперсию *D(x)*.

Решение:

1) Дифференциальной функцией распределения f*(x)* непрерывной случайной величины *x* называется производная *F(x)*, т.е. *f(x) = F ′(x)*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x<0 \\ 3x^2, \text{ при } 0\le x\le 1 \\ 0, \text{ при } x>1 \end{cases}$$

2) Так как *f(x)* при *x* <0 и при *x* >1 равно 0, то

$M(x) = \int_0^1 x \cdot ¿¿ \; 3x^2 dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$

$3)D(x)= \int_0^1 (x-\frac{3}{4})^2 3x^2 dx = 3 \int_0^1 (x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16})x^2 dx = 3\int_0^1 (x^4-\frac{3x^3}{2}+\frac{9x_2}{16})dx =$

$$=3(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{8}+\frac{3x^3}{16})\Big|_0^1=3(\frac{1}{5}-\frac{3}{8}+\frac{3}{10})=\frac{3}{80}$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение дискретной случайной величине. Приведите примеры.
2. Дайте определение непрерывной случайной величине. Приведите примеры.
3. Что называется законом распределения случайной величины?
4. Какие числовые характеристики характеризуют случайную величину?
5. Дайте определение числовым характеристикам случайной величины
6. Назовите свойства математического ожидания.

7. Назовите свойства дисперсии.
8.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.

Вариант 1. Составить закон распределения числа попаданий в цель при шести выстрелах, если вероятность попаданий при одном выстреле равно 0,4.

Вариант 2. Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые он посетит, если в городе четыре библиотеки.

Задание 2.

Найти математическое ожидание случайных величин X и Y, зная законы их распределения.

X	-8	-4	-1	1	3	7
P	1/12	1/6	1/4	1/6	1/12	1/4

Y	-2	-1	0	1	2	5
P	1/6	1/6	1/2	1/3	0	1/4

Задание 3.

Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения:

Вариант 1.

X	0	1	2	3	4
p	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Вариант 2.

X	15	11	13	12
p	0,2	0,5	0,2	0,1

Задание 4.

Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x)$. Найти: 1) дифференциальную функцию распределения $f(x)$; 2) математические ожидание $M(X)$; 3) дисперсию $D(X)$.

Вариант 1.

$$F(X)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ x^2 \text{ при } 0\leq x\leq 1 \\ 1 \text{ при } x>1. \end{cases}$$

$$F(X)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ \dfrac{x^2}{16} \text{ при } 0\le x\le 4 \\ 1 \text{ при } x>4. \end{cases}$$

Вариант 2.

Практическая работа 11
ТЕМА Матрицы. Действия над ними.

ЦЕЛЬ. Научить выполнять действия над матрицами.

УМЕНИЯ И НАВЫКИ:

- *знать* виды матриц, правила выполнения действий над матрицами;
- *уметь* складывать, вычитать, умножать, транспонировать; матрицы.

Теоретический материал

Матрицей размера m x n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, составляющие матрицу, называются ***элементами*** матрицы.

Ряд чисел, расположенных горизонтально, называется ***строкой*** матрицы, а вертикально – ***столбцом***.

Например, матрица $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & -6 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ имеет 2 строки и 4 столбца, значит ее размер 2 х 4 ($m = 2$, $n = 4$)

Общий вид матрицы:

$$\underset{mxn}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной записи, $A=(a_{ij})$; $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$

Две матрицы A и B одного размера называются ***равными***, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ *для* любых i=1, 2, ..., m; j= 1,2, ...,n.

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, таблица

Ресурсы	Отрасли экономики	
	промышленность	сельское хозяйство
Электроэнергия	5,3	4,1
Трудовые ресурсы	2,8	2,1
Водные ресурсы	4,8	5,1

распределения ресурсов по отдельным отраслям экономики (усл. ед.) может быть записана в компактной форме в виде матрицы распределения ресурсов по отраслям: $\underset{3x2}{A} = \begin{pmatrix} 5{,}3 & 4{,}1 \\ 2{,}8 & 2{,}1 \\ 4{,}8 & 5{,}1 \end{pmatrix}$

Матрица, состоящая из одной строки, называется ***матрицей*** *(вектором)* или ***строкой,*** а из одного столбца – ***матрицей*** *(вектором)* или ***столбцом****:*
A = (a_{11} a_{12} … a_{1n}) – матрица строка   например,   A = (2 -7   8   1   0)

B = $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ d_{1m} \end{pmatrix}$ матрица столбец,   например, B = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Матрица называется ***квадратной*** *n-ого* порядка, если число ее строк равно числу столбцов и равно *n*. Например матрица A = $\begin{pmatrix} -6 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -9 & 8 \end{pmatrix}$ – 3-его порядка, т.к. имеет 3 строки и 3 столбца.

Элементы матрицы a_{ij} , у которых номер столбца равен номеру строки ($i = j$)*,* называются *диагональными,* и образуют *главную диагональ* матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы a_{11} ,a_{22}, a_{33}, …,a_{nn}.В матрице *A* диагональными элементами будут –6, 4 и 8.

Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется ***диагональной***.

Например, B = $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ — диагональная матрица третьего порядка.

Матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется ***треугольной*** (если матрица квадратная), или ***ступенчатой*** матрицей.

Например: A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 2{,}1 \\ 0 & 7 & -3{,}6 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Матрицы A и B -треугольные матрицы

C = $\begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ - ступенчатая матрица

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется ***единичной*** матрицей n-го порядка, она обозначается буквой E.

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется ***нулевой,*** или *нуль матрицей,* если все ее элементы равны нулю и обозначается буквой O.

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые специфические.

Произведением матрицы *А* на число *К* называется матрица $B = K\,A,$ элементы которой $b_{ij} = K\,a_{ij}$ для $i = 1,2, ..., m;\ j = 1,2, ..., n.$

Например, если

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, то матрица $C = -3A = \begin{pmatrix} -6 & -9 & 12 \\ 0 & -18 & 6 \end{pmatrix}$,

Суммой (разностью) двух матриц *А и В* одинакового размера $m \times n,$ называется матрица $C = A + B\ (C = A - B),$ элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$), для $i = 1, 2. .... m;\ j = 1, 2, ..., n$, т.е. матрицы складываются (вычитаются) поэлементно.

Пример1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Найдем матрицы C = A + B и D = A – B

$$C = \begin{pmatrix} 4-1 & -5+0 & 0+2 \\ 2+3 & 5+1 & ¿6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4-(-1) & -5-0 & 0-2 \\ 2-3 & 5-1 & -6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \\ -1 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

В частном случае $A + 0 = A.$

Умножение матрицы *А* на матрицу *В* определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матриц $A(m \times n)$ на матрицу $B(n \times p)$ называется матрица $C(m \times p)$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Пример 2. Вычислить произведение матриц A и B , где

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Решение: Найдем размер матрицы-произведения, если умножение матриц возможно, то *A* x *B* = *C*. Матрица *A* имеет размер *2*x*3*, а матрица *B* - *3*x*3,* число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы *B*, значит произведение матриц возможно, матрица *C* = *A* x *B* будет иметь размер *2*x*3* (число строк матрицы *A* и число столбцов матрицы *B*).

Вычислим элементы матрицы-произведения *C,* умножая элементы каждой строки матрицы *A* на соответствующие элементы столбцов матрицы *B* следующим образом:

c_{11} = 3·7+0·0+(-2)·1 = 21-2 = 19 (умножаем элементы 1-ой строки матрицы А на элементы 1-ого столбца матрицы В)

c_{12} = 3·3+0·4+(-2)·0 = 9 (умножаем элементы 1-ой строки матрицы А на 2-ой столбец матрицы В)

c_{13} = 3· (-1) + 0·3 + (-2) ·5 = -3 –10 = -13 (умножаем элементы 1-ой строки матрицы А на элементы 3-его столбца матрицы В)

c_{21} = 1 · 7 + 5 · 0 – 4 · 1 = 7-4 = 3 (умножаем элементы 2-о1 строки матрицы А на элементы 1-ого столбца матрицы В)

c_{22} = 1 · 3 + 5 · 4 – 4 · 0 = 3 + 20 = 23 (умножаем элементы 2-ой строки матрицы А на элементы 2 –ого столбца матрицы В)

c_{23} = 1 · (-1) + 5 · 3 – 4 · 5 = -1 +15 – 20 = -6 (умножаем элементы 2-ой строки матрицы А на элементы 3-его столбца матрицы В)

Итак,

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 9 & -13 \\ 3 & 23 & -6 \end{pmatrix}$$

Операция умножения матриц имеет некоторые отличия от умножения чисел:

а) Если произведение матриц *AB* существует, то после перестановки сомножителей местами произведение матриц *BA* может и не существовать. Действительно, в примере 1 произведение матриц *B* x *A* не существует, так как число столбцов матрицы *A* не совпадает с числом строк матрицы *B*.

б) Если даже произведения *AB* и *BA* существуют, то они могут быть матрицами разных размеров, т.е. *AB* ¿ *BA*.

в) В случае, когда оба произведения *AB* и *BA* существуют и оба – матрицы одинакового размера (это возможно только при умножении квадратных матриц *A* и *B* одного порядка), однако *коммутативный (переместительный) закон умножения не выполняется,* т.е.

Пример 3. Найти произведения матриц *AB* и *BA,* где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ¿ ¿$$

Решение

Произведение *A* на *B* возможно, т.к. число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В и равно 3. Матрица *AB* будут иметь размер 2 x 2.

$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot2+1\cdot1-1\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot5+1\cdot1 \\ 0\cdot0+3\cdot1+2(-1) & 0\cdot3+3\cdot5+2\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$

Произведение *B* на *A* возможно, т.к. число столбцов матрицы *B*, равное 2, равно числу строк матрицы *A*, равное 2. Матрица *BA* будет иметь размер 3 x 3.

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Отсюда следует, что $AB \neq BA$

В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы *A n-ого* порядка на единичную матрицу *E* того же порядка, причем это произведение равно матрице *A* x *E* = *E* x *A* = *A*.

Если произведения *AB* и *BA* равны, то матрицы называются ***перестановочными*.**

Целой положительной **степенью** A^m *(m>1)* квадратной матрицы *A* называется произведение *m* матриц, равных *A,* т.е. $A^m = A \times A \times A \times A \times .... \times A$.

Операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

Пример 4. Найти A^3 матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \times A \times A = (A \times A)\, A = A^2 \times A$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

Из равенства $A^m = 0$ не следует, что матрица *A* = *O*.

Если в матрице *A* поменять местами строки и столбцы с сохранением порядка, то получим матрицу *A'*. Матрица *A'* называется ***транспонированной*** относительно матрицы *A*.

Если матрица *A* имеет размер *m* x *n,* то транспонированная матрица *A'* имеет размер *n* x *m.*

Например:

$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Рассмотренные выше операции над матрицами позволяют упростить решения некоторых экономических задач.

Пример 5. Предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1, P_2, P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, где каждый элемент показывает, сколько единиц сырья типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C = (100\ 80\ 130)$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей-столбцом $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$. Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Решение. Затраты 1-го сырья составляют $S_1 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 =$ 430 ед. и 2-го - $S_2 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение $S = C \cdot A = (100\ 80\ 130) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (730\quad 980)$.

Тогда общая стоимость сырья $Q = 730 \cdot 30 + 980 \cdot 50 = 70900$ ден. ед. может быть записана в матричном виде $Q = S \cdot B = (CA)\, B = (70900)$.

Пример 6. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		энергетика	машиностроение		
Производство	Энергетика	7	21	144	100
	Машиностроение	12	15	123	150

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроения сохранится на прежнем уровне.

Решение. Имеем $x_1 = 100$, $x_2 = 150$, $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$, $y_1 = 144$, $y_2 = 123$.

Находим коэффициенты прямых затрат a_{ij}:

$a_{11}=\frac{x_{11}}{x_1}=0,07$; $a_{12}=\frac{x_{12}}{x_2}=0,14$; $a_{21}=\frac{x_{21}}{x_1}=0,12$; $a_{22}=\frac{x_{22}}{x_2}=0,10$.

Матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}$ имеет неотрицательные элементы и удовлетворяет критерию продуктивности:

$max \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$, $(max\{0,07+0,12;\ 0,14+0,10\} = max\{0,19;\ 0,24\} = 0,24 < 1)$

Поэтому для любого вектора конечного продукта Y можно найти необходимый объем валового выпуска X по формуле $X = (E - A)^{-1}Y$. Найдем матрицу полных затрат $S = (E - A)^{-1}$:

$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,24 \\ -0,12 & 0,90 \end{pmatrix}$, ее определитель Δ = 0,8202 ¿ 0, тогда $S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}$

Вектор валового выпуска $X = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}$,т.е. валовой выпуск в энергетической отрасли надо увеличить до 179,0 усл.ед., а в машиностроительной – до 160,5 усл. ед.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей?
2. Назовите виды матриц и дайте им определения.
3. Какие операции определены с матрицами?
4. Выполним ли переместительный закон умножения для матриц?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.Даны матрицы A и B. Вычислите а) $A + B$; б) $2A – 3AB$; в) $BA + 4E$.

	матрица A	матрица B
Вариант 1	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

	матрица A	матрица B
Вариант 2	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
Вариант 3	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
Вариант 4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 2. Вычислить матрицу $D = (AB)^{\mathrm{T}} - C^2$ (1 и 3 варианты), если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},\ \ C=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$D = (BA)^{\mathrm{T}} + C^2$ (2 и 4 варианты), если $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 3. Какую матрицу надо прибавить к матрице A, чтобы получить матрицу E:

Вариант 1	$A=\begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
Вариант 2	$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Вариант 3	$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
Вариант 4	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти произведение матриц AB и BA

Вариант 1, 3. а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

Вариант 2, 4. а) $A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 4\\ 0 & 6 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -7 & 5\\ 0 & 4 & -1\\ 6 & 8 & -2\end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix}8\\ -2\\ 0\\ 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & -6 & 4 & 2\end{pmatrix}$

Практическая работа 12
ТЕМА Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом обратной матрицы.

ЦЕЛЬ. Научить решать системы линейных урвнений.
УМЕНИЯ И НАВЫКИ:

- *знать* формулы Крамера и алгоритм решения систем методом обратной матрицы;
- *уметь* вычислять определители.

Теоретический материал

Система *m* линейных уравнений с *n* переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_b = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_n + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где a_{ij} – произвольные числа, называемые соответственно *коэффициентами при переменных,* b_i - *свободные члены* уравнений для i = 1, 2. .... *m; j* = 1, 2, ..., *n*.

В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде: $\sum_{i=1}^{n} ¿\ a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2/\ldots m) ¿$.

Решением системы называется такая совокупность *n* чисел, при подстановке которых в данные уравнения, каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной,* если она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной,* если она имеет более одного решения.

Систему линейных уравнений можно записать в матричной форме *AX* = *B*.

Обозначим:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

где *A – матрица коэффициентов при переменных,* или *матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.*

Пусть число уравнений системы равно числу переменных, т.е. $m = n$., тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель Δ, составленный из коэффициентов при переменных называется *определителем системы.*

Рассмотрим **решение *системы*** *с помощью определителей* ***по формулам Крамера***:

1) если определитель системы Δ ¿ 0, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ … $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$,

где Δ – определитель системы, Δ_1, Δ_2,… Δ_n (Δ_j ¿ 0, $j = 1, 2, ..., n$) – определители, которые получаются из Δ заменой коэффициентов при соответствующей переменной на свободные члены, например для составления Δ_1 надо столбец коэффициентов при x_1 (1-ый столбец) в Δ заменить свободными членами, т.е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ b_2 & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) если $\Delta = 0$, а Δ_j ¿ 0 ($j = 1, 2, ..., n$), то система несовместная, так как в этом случае приводится к виду $0 = \Delta_j$;

3) если $\Delta = \Delta_j = 0$, то система неопределенная и имеет бесконечное множество решений, так как в этом случае приводится к виду 0 = 0.

Пример1. Решить систему

1) $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=-7 \\ x_1-2x_2-5x_3=11 \\ 3x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$

Найдем определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2-45+4+24-3+5=-17$$

Вычислим Δ_1, заменив коэффициенты при x_1 (1-ый столбец) на столбец свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & 3 & 4 \\ 11 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 - 15 + 44 + 8 - 33 = -17$$

Вычислим Δ_2, для этого в Δ заменим коэффициенты при x_2 (2-ой столбец) на столбец свободных членов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 1 & 11 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 11 + 105 + 4 - 132 + 7 + 5 = 0$$

Вычислим Δ_3,, заменив 3-ий столбец (коэффициенты при x_3) на свободные члены:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 1 & -2 & 11 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 99 - 7 - 42 - 3 - 11 = 34$$

Найдем x_1, x_2, x_3 по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{-17}{-17} = 1 \qquad x_2 = \frac{0}{-17} = 0 \qquad x_3 = \frac{34}{-17} = -2 .$$

Проверим правильность найденных решений, подставив найденное решение в данную систему вместо соответствующих переменных

$1 + 0 - 8 = -7 \quad -7 = -7; \qquad 1 - 0 + 10 = 11 \quad 11 = 11; \qquad 3 + 0 - 2 = 1 \quad 1 = 1$

Ответ: (1; 0; -2)

Решением системы **методом обратной матрицы** будет матрица-столбец $X = A^{-1} B$

Итак, чтобы решить систему методом обратной матрицы надо записать систему в матричном виде, найти матрицу обратную матрице системы и умножить ее на матрицу свободных членов.

Пример 2. Решить систему уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Составим матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$ и $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Тогда в матричной форме система имеет вид $AX=B$, отсюда матрица $X = A^{-1} B$

Найдем матрицу, обратную матрице A:

Вычислим определитель матрицы A

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-1) + 1(4-1) + 1\,(2-1) = 5$$

Протанспонируем матрицу A и вычислим ее алгебраические дополнения

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = (-1)_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$

$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$ $A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3$

$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$ $A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1$

$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$ $A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2$

$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3$

Составим присоединенную матрицу A^* из найденных алгебраических дополнений

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Теперь найдем матрицу X

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & +33 & -16 \\ -9 & +11 & +8 \\ 3 & -22 & +24 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Используя определение равенства матриц, получим $x_1 = 4 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 1$, т.е. решение системы (4; 2;1).

Существенным недостатком решения систем n линейных уравнений с n переменными по формулам Крамера и методом обратной матрицы является их большая трудоемкость, связанная с вычислением определителей и нахождением обратной матрицы. Поэтому эти методы представляют скорее теоретический интерес и на практике не могут быть использованы для решения реальных экономических задач, сводящихся часто к системам с большим числом уравнений и переменных.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется определителем системы?
2. Какие способы вычисления определителей вы знаете?
3. Какая матрица называется обратной?
4. Как найти матрицу обратную данной?
5. Как записать систему в матричном виде?
6. Как найти решение системы по формулам Крамера?
7. Как найти решение системы методом обратной матрицы?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Вычислить определитель матрицы A: а) добавлением строк или столбцов; б) по теореме Лапласа; в) получением нулей в строке или столбце.

Вариант 1	$A=\begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
Вариант 2	$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Вариант 3	$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
Вариант 4	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 2. Решить системы по формулам Крамера и методом обратной матрицы

Вариант 1	а) $\begin{cases} 2x+y-3z=-5 \\ x-2y+2z=17 \\ x+y+3z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-3y+z=43 \\ x+y-z=3 \\ 2x+y=13 \end{cases}$
Вариант 2	а) $\begin{cases} 6x+3y-5z=0 \\ 9x+4y-7z=3 \\ 14x+6y-11z=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 3x-5y-6z=-21 \\ 3x+y+z=-4 \end{cases}$

Вариант 3	а) $\begin{cases} 2x+y-3z=-5 \\ x-2y+2z=17 \\ x+y+3z=4 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 4x-3y+z=43 \\ x+y-z=3 \\ 2x+y=13 \end{cases}$
Вариант 4	а) $\begin{cases} 6x+3y-5z=0 \\ 9x+4y-7z=3 \\ 14x+6y-11z=6 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 3x-5y-6z=-21 \\ 3x+y+z=-4 \end{cases}$

Практическая работа 13

ТЕМА Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

ЦЕЛЬ. Научить исследовать системы и находить их решения методом Гаусса.

УМЕНИЯ И НАВЫКИ:

- *знать* сущность метода Гаусса;
- *уметь* применять элементарные преобразования матриц и находить их ранг.

Теоретический материал

Рассмотрим решение системы *m* линейных уравнений с *n* переменными в общем виде **методом Гаусса**.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей, составленной из коэффициентов и свободных членов, которая называется ***расширенной матрицей системы***.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=18, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right)$

Так как a_{11} ¿ 0, то умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2), (-3), (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключим переменную x_1, из всех строк, начиная со второй. Заметив, что в новой матрице $a_{22} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)$, разделим элементы второй строки на -2, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)$, так как теперь a_{22} = 2 ¿ 0, то умножая вторую строку на 7, а четвертую на 2 и прибавляя полученные строки, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 27 & -18 & 9 \end{array}\right)$, разделим элементы четвертой строки на 9 и, учитывая, что a_{32} =1, умножим элементы третьей строки на 2 и сложим с соответствующими элементами четвертой строки, таким образом исключим переменную x_4 в четвертой строке $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 13 \end{array}\right)$

Составим из полученной матрицы систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \\ 2x_2+5x_3-4x_4=7 \\ -8x_3+x_4=6 \\ -13x_3=13 \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения x_3, затем остальные переменные:
x_3= -1; x_4 = 6 + 8 x_3 = 6 - 8 = -2; 2 x_2 = 7 - 5 x_3 + 4 x_4 = 7 + 5 - 8 = 4, x_2 = 2;
x_1 = 6 - 2x_2 - 3 x_3 +2 x_4 = 6 - 4 + 3 - 4 =1, получили решение системы (1; 2; -1; -2).

Пример 2.. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы, используя элементарные преобразования

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству 0 = -1, следовательно, данная система несовместна.

Вопрос о разрешимости системы *m* линейных уравнений с *n* переменными представим в виде таблицы

<table>
<tr><td rowspan="3">Система m линейных уравнений с n переменными</td><td rowspan="2">совместна</td><td>ранг матрицы равен числу переменных (r = n)</td><td>имеет единственное решение</td></tr>
<tr><td>ранг матрицы меньше числа переменных (r < n)</td><td>имеет множество решений</td></tr>
<tr><td>несовместна</td><td>ранг матрицы не равен рангу расширенной матрицы (r ¿ r₁)</td><td>не имеет решений</td></tr>
</table>

Если система имеет бесконечное множество решений, т.е. неопределенная (*r<n),* то *r* переменных принимают за базисные (или основные), определитель из коэффициентов при этих переменных должен быть отличен от нуля. Остальные *n - r* принимают за *свободные* (или неосновные). Для нахождения решений системы базисные переменные выражают через свободные, которые могут принимать любые значения.

Для решения системы в общем случае необходимо вычислять, а затем сравнивать ранги матрицы системы и расширенной матрицы, используя метод Гаусса.

Достоинства метода Гаусса по сравнению с другими:

• значительно менее трудоемкий;

• позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти ее решения (единственное или бесконечное множество);

• дает возможность найти ранг матрицы системы и расширенной матрицы.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому или треугольному виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы равны $r=2$. Так как ранг меньше числа переменных($r = 2$, $n = 4$), то система имеет множество решений. Две переменные примем за базисные, т.к. определитель, составленный из коэффициентов при x_1, x_2 не равен нулю $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$. Итак, x_1, x_2 - базисные, остальные x_3, x_4 – свободные. Составим из полученной матрицы систему, перенесем в правую часть уравнений свободные переменные. В результате получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4, \\ -5x_2 = 17 - 5x_3 + 7x_4. \end{cases}$$

Задавая свободным переменным произвольные значения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$;, найдем бесконечное множество решений системы.

$$\left(x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\ \ x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\ \ x_3 = c_1;\ \ x_4 = c_2\right).$$

Система m линейных уравнений с n переменными называется системой линейных *однородных* уравнений, если все их свободные члены равны нулю.

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (или тривиальное) решение (0; 0; ...; 0).

Пример.

1) $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Составим матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому или треугольному виду

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -11 \\ 0 & 1 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Отсюда ранг r=3 и n=3, значит, система имеет единственное решение (0; 0; 0)

2) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ x_1+4x_2-x_3=0 \\ 2x_1+6x_2-4x_3=0 \end{cases}$

Найдем ранг матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Отсюда r =2, а n = 3 система имеет множество решений. Из полученной матрицы составим систему

$$\begin{cases} x_1+ \ 2x_2-3x_3=0 \\ x_2 \ + \ x_3 \ = \ 0 \end{cases}$$

За базисные переменные примем x_1 и x_2 (r = 2), а x_3 – за свободную перенесем x_3 в правую часть

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \quad ¿ \quad 3x_3 \\ ¿ \quad x_2 \quad ¿ \quad -x_3 \end{cases},$$

т.к. $x_2 = -x_3$,, то $x_1 = 3x_3 - 2(-x_3) = 5x_3$

Пусть $x_3 = c$, где c- любое число, тогда решением будут $x_1 = 5c$ $x_2 = -c$ x_3 = c.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется рангом матрицы?
2. Назовите элементарные преобразования матрицы
3. Какая система называется совместной?
4. Когда совместная система имеет единственное решение?
5. Когда совместная система имеет бесконечное множество решений?
6. Когда система не имеет решений?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Исследуйте и решите системы методом Гаусса

Вариант 1	а) $\begin{cases} 2x+y-3z=-5 \\ x-2y+2z=17 \\ x+y+3z=4 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 3x-2y-5z+t=3 \\ 2x-3y+z+5t=-3 \\ x+2y-4t=-3 \\ x-y-4z+9t=22 \end{cases}$

	в)) $\begin{cases} 3x-2y+3z-3t=0 \\ 3x-2y-z+t=0 \\ x-y+2z+5t=0 \end{cases}$
Вариант 2	а) $\begin{cases} 6x+3y-5z=0 \\ 9x+4y-7z=3 \\ 14x+6y-11z=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-3y+z+5t=7 \\ x-2y-2z-3t=3 \\ 3x-y+2z=1 \\ 2x+3y+2z-8t=-7 \end{cases}$ в)) $\begin{cases} 2x+y+z+t=1 \\ y-z+2t=2 \\ 2x+2y+3t=3 \end{cases}$

Практическая работа № 14
ТЕМА: Действия над комплексными числами.

ЦЕЛЬ: научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

УМЕНИЯ И НАВЫКИ:

- *знать:* определение комплексного числа; правила сложения, вычитания векторов; правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме;
- *уметь:* изображать комплексные числа на координатной плоскости; выполнять действия над комплексными числами; решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом.

Теоретический материал

Число вида $z = a + bi$, где a и b – любые действительные числа, а i – мнимая единица, определяемая равенством $\sqrt{-1} = i$ или $i^2=-1$, называется комплексным числом.

Числа a и b называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются: $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа.

Два комплексных числа считаются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 - b_2i$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются сопряжёнными. Произведение двух сопряженных комплексных чисел равна сумме квадратов действительной и мнимой частей, т.е. $(a + bi)\,(a - bi) = a^2+b^2$.

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел в алгебраической форме определяются естественным образом из соответствующих действий над многочленами, если считать $i^2=-1$. При делении двух чисел надо числитель и знаменатель умножить на число, сопряженное знаменателю, выполнить действия умножения и привести к виду $a + bi$.

Пример 1. Выполнить действия над комплексными числами $z_1 = 2 + 6i$ и $z_2 = 3 – 2i$

Решение:

Сложение: $z_1 + z_2 = (2 + 6i) + (3 – 2i) = 2 + 6i + 3 – 2i = 5 + 4i$.

Вычитание: $z_1 – z_2 = (2 + 6i) – (3 – 2i) = 2 + 6i – 3 + 2i = –1 + 8i$.

Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (2 + 6i) \cdot (3 – 2i) = 6 – 4i + 18i – 12i^2 = 6 – 4i + 18i + 12 =$ $=18 + 14i$.

Деление: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+6i}{3-2i}=\frac{(2+6i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)}=\frac{6+4i+18i+12i^2}{9+4}=\frac{-6+22i}{13}=\frac{-6}{13}+\frac{22}{13}i$.

Комплексное число можно изобразить точкой с координатами (a; b) или вектором $\overrightarrow{OM}(a; b)$. При сложении (вычитании) комплексных чисел геометрически соотвеиствующие вектора складываются (вычитаются) по правилу параллелограмма.

Длина этого вектора называется модулем комплексного числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль комплексного числа можно вычислить по формуле $r=\sqrt{a^2+b^2}$. Угол, образованный этим вектором с положительным направлением действительной оси Ox, называется аргументом и обозначается φ или $Arg\ z$. Величина аргумента многозначна и определена с точностью до числа 2π. Значение аргумента заключено в пределах от 0 до 2π.

Если $a > 0$ и $b > 0$, то $\varphi = \alpha$; если $a < 0$ и $b > 0$, то $\varphi = \pi - \alpha$;

если $a<0 \, и \, b<0, то\, \varphi=\pi+\alpha\, ; если\, a>0\, и\, b<0, то\, \varphi=2\pi-\alpha$, где $\alpha=arc\,tg\left|\frac{b}{a}\right|$.

Комплексное число, кроме алгебраической формы, можно записать в тригонометрической и показательной. Тригонометрическая форма комплексного числа $z = a + bi$ имеет вид $z=r(sin\varphi+icos\varphi)$. Показательная форма имеет вид $z=re^{i\varphi}$.

Пример 2. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число $z = 3 – i\sqrt{3}$.

Решение:

По условию $a = 3$, $b = -\sqrt{3}$.

Находим модуль комплексного числа $r=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$. Вычислим $\alpha=arctg\left|\frac{-\sqrt{3}}{3}\right| =\frac{\pi}{6}$, т.к. a > 0 b < 0, то $\varphi=2\pi-\alpha=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$. Тригонометрическая форма этого комплексного числа будет иметь вид $z=2\sqrt{3}\left(\sin\frac{11\pi}{6}+icos\frac{11\pi}{6}\right)$, а показательная форма $z=2\sqrt{3}e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

Вопросы для самопроверки

1. Какое число называется комплексным?
2. Что такое мнимая единица?
3. Как записывается комплексное число в алгебраической форме?
4. Что называется модулем комплексного числа? Как его вычислить?

5. Что называется аргументом комплексного числа? Как его найти?
6. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
7. Как записывается комплексное число в показательной форме?
8. Как перейти от алгебраической формы записи числа к тригонометрической и показательной?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Изобразите комплексные числа на координатной плоскости

Вариант 1	*Вариант 2*
$z_1 = 2 + 3i$	$z_1 = -2 + 4i$
$z_2 = -6 - 4i$	$z_2 = 3 + 6i$
$z_3 = 6i$	$z_3 = 8$
$z_4 = -7$	$z_4 = -5$

Задание 2. Выполните геометрически действия над числами

Вариант 1	*Вариант 2*
$z_1 = 4 + 4i, \quad z_2 = 5 - i$	$z_1 = 2, \quad z_2 = -3i$
$z_1 = -3, \quad z_2 = 2i$	$z_1 = -5 - 2i, \quad z_2 = -3 + 3i$

Задание 3. Решите уравнение

Вариант 1. $x^2 + 2x + 5 = 0$ *Вариант 2.* $x^2 - 6x + 18 = 0$

Задание 4. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа

Вариант 1	*Вариант 2*
$z_1 = -2 + 2i, \quad z_2 = -6$	$z_1 = -5 - 5i, \quad z_2 = 3i$

Задание 5. Выполните действия

$$\frac{(1+2i)*(4-3i)}{3+5i} - \left(\frac{1}{34} + \frac{3}{34}i\right)$$

Задание 6. Найдите степень числа i, учитывая что

$i^1 = i$ $i^2 = 1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$

$i^{4n+1} = i$ $i^{4n+2} = 1$ $i^{4n+3} = -i$ $i^{4n} = 1$

Например: $i^{24} = i^{4*6} = 1$; $i^{59} = i^{4*14+3} = -i$; $i^{42} = i^{4*10+2} = -1$;

Вариант 1	*Вариант 2*
i^{70}	i^{47}
i^{25}	i^{100}
$i^{?}$	$i^{?}$

Замечание. Вместо знака вопроса (?) поставьте любое число большее 50

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математика играет важную роль в естественнонаучных и гуманитарных исследованиях. Она стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с её развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен процесс в различных областях человеческой деятельности.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как составляющую в системе фундаментальной подготовки бухгалтера и экономиста.

Изучению вопросов, связанных с математической грамотностью, уделяется пристальное внимание. Математика является одним из опорных дисциплин, которая обеспечивает изучение других, требует от студентов волевых и умственных усилий, развитого воображения, концентрации внимания, развивает личность студента. Кроме того, математика развивает логическое мышление и расширяет кругозор.

Выполнение студентами практических работ способствует:

- обобщению, систематизации, углублению, закреплению полученных теоретических знаний по конкретным темам естественнонаучного, общепрофессионального и специального циклов;
- формированию умений применять полученные знания на практике, реализации единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитию интеллектуальных умений, общенаучных компетенций у будущих специалистов;
- выработки при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность творческая инициатива;
- создания условия для развития коммуникативной, адаптивной и информационной компетенций.

Методическое пособие может быть использовано преподавателями и студентами учреждений среднего профессионального образования, учителями и учащимися старших классов средней школы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Валуцэ И.И. Математика для техникумов: учеб. пособие/ И.И. Валуцэ, Г.Д. Дилигул. - изд 2, перераб. и доп. - М.: Наука, 2009. - 575 с.
2. Дадаян А. А. Математика /А. А. Дадаян - М.: Наука, 2010. - 463 с.
3. Щипачёв В.С. Высшая математика: учебник для вузов:/ В.С. Щипачёв. - 4-е изд. -М.: Высшая школа, 2008. - 479 с.
4. Данко И.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов втузов/ И.Е. Данко, А.Г. Попов, *Т.Я.* Кожевникова. - 4-е изд. - М.: Высшая школа, ч. 1, 1986. 304 с.
5. Данко И.Е.- Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов втузов/ И.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 4-е изд. - М.: Высшая школа, ч. 2, 2006. 415 с.
6. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Учебник для вузов/ Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2007. – 471с.
7. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студ. сред. проф. учреждений/ С.Г. Григорьев, С.В. Задулина; под ред. В.А. Гусева. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 384 с.
8. Пехлетский И.Д. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования/ И.Д, Пехлецкий. – 6-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 304 с.
9. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: уч. пособие для вузов/В.Е. Гмурман. - 6-е изд. - М.: Высшая школа, 2008. 479с.
10. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для вузов/ В.Е. Гмурман. - 4-е изд. - М.: Высшая школа, 2008. 400 с.
11. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. -М.: Наука, 2000.

Интернет-ресурсы

1. http://www.youtube.com/watch?v=TxFmRriSpKo(Геометрический смысл производной)
2. http://www.youtube.com/watch?v=PbbyP8oEv-g (Лекция 1. Первообразная и неопределенный интеграл)
3. http://www.youtube.com/watch?v=2N-ljQ_T798&feature=channel (Лекция5. Интегрирование по частям)
4. http://www.youtube.com/watch?v=71ezxG4ATcA&feature=channel (Лекция 3. Непосредственное интегрирование)
5. http://www.youtube.com/watch?v=s-FDv3KlKHU&feature=charmel (Лекция 4. Метод подстановки)
6. http://www.youtube.com/watch?v=dU_FMq_lssO&feature=channel (Лекция12. Понятие определенного интеграла)
7. http://www.youtube.com/watch?v=C_7clQcJP-c (Теория вероятности)
8. http://www.youtube.com/watch?v=dZPRzBlNj08 (Комплексные числа, часть 1)